

KÖZOKTATÁSI KUTATÁSOK

Csapó Benő

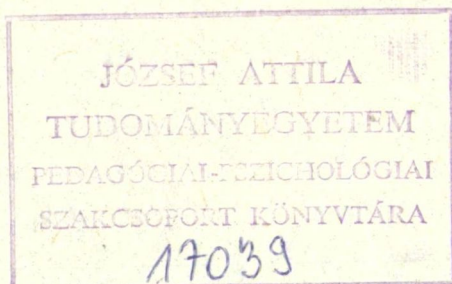
A KOMBINATÍV KÉPESSÉG STRUKTÚRÁJA ÉS FEJLŐDÉSE



AKADÉMIAI KIADÓ

A KOMBINATÍV KÉPESSÉG STRUKTÚRÁJA ÉS FEJLŐDÉSE

Csapó Benő



Akadémiai Kiadó, Budapest

1988

XB 105 228

SZTE Egyetemi Könyvtár



J000751646

KÖZOKTATÁSI KUTATÁSOK

Megjelenik az Akadémiai Kiadó és a Közoktatási Kutatások Tudományos Tanácsa mellett működő Szerkesztő Bizottság gondozásában.
Sorozatszerkesztők: Gellériné Lázár Márta és Rét Rózsa

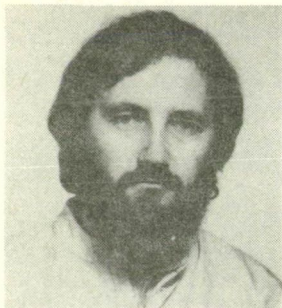
E kiadvány az OKKFT Ts-4/1 kutatás keretében készült.

Bírálták: Joó András
Kürti Istvánné

© Csapó Benő 1988

ISBN 963054853 4

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1988
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó
és Nyomda Vállalat főigazgatója
Felelős szerkesztő: Hanzséros György
Szerkesztés: ADATREND-MICROCOMP
Készült az Oktatáskutató Intézet
sokszorosító üzemében
Felelős vezető: Szabó Gyuláné
Munkaszám: 62/1988
ISSN szám: 59850
Terjedelem: 17,5 A/5 ív



Csapó Benő a József Attila Tudományegyetem Pedagógiai Tanszékének adjunktusa, a neveléstudomány kandidátusa. Kutatómunkája elsősorban az oktatáselmélet különböző területeihez kapcsolódik. Közreműködik a megtanító stratégiák adaptálásában és hazai elterjesztésében (*A mastery learning elmélete és gyakorlata*, Magyar Pedagógia, 1978. 1. sz.; *Megtanító stratégiák agrártudományi felsőoktatási intézmények alapozó tárgyaiban*, szerk., Budapest, 1982; *A megtanító stratégiák hatékonysága a felsőok-*

tatásban, Budapest, 1988). A kognitív fejlődés egyes konkrét területeinek vizsgálatán (*A kombinatív képesség és értékelésének feltételei*, Szeged, 1979; *A rajzkészség fejlettségének vizsgálata középiskolai tanulóknál*, társszerzővel, Szeged, 1985) túl a pedagógiai értékelés elméleti kérdéseivel foglalkozik (*A kritérium-orientált értékelés*, Magyar Pedagógia 1988. 2. sz.). A könyvben bemutatott vizsgálat folytatásaként a gondolkodás műveleti képességeinek iskolai fejlesztésével kapcsolatos kísérleteket végez (*A gondolkodás fejlesztése az iskolai tantárgyak keretében*, Pedagógiai Szemle, 1987. 7-8. sz.; *A kombinatív képesség fejlesztése az általános iskolában*, Pedagógiai Szemle, 1987. 9. sz.).

TARTALOM

Bevezetés	7
1. Előzmények és problémák	11
1.1 A kombinativitás problémájának alakulása a pszichológiában	11
1.2 A Piaget iskola	14
1.3 A kombinatív műveletekkel kapcsolatos vizsgálatok	20
1.4 Kombinatív jellegű problémák néhány magyar pedagógiai-pszichológiai vizsgáltban	22
2. Elméleti háttér	25
2.1 A kombinatív képesség általános koncepciója	25
2.2 A kombinatív műveletek hipotetikus rendszere	29
3. A vizsgálat eszközei	35
3.1 A tesztrendszer kidolgozásának alapelvei	35
3.2 A manipulatív feladatok	40
3.3 A képi feladatok	41
3.4 A formális feladatok	42
3.5 A mérőeszközök validitása és reliabilitása	43
4. Az empirikus vizsgálat	49
4.1 Az adatfelvétel	49
4.2 Az adatfeldolgozás	53
5. Manipulatív tartalom	59
5.1 A manipulatív feladatok teljesítményei	59
5.2 A manipulatív feladatok fejlődési folyamatai	63
5.3 A manipulatív szubtesztek eredményei	68
5.4 A manipulatív teljesítmények összefüggésvizsgálata	69
5.5 A manipulatív teljesítmények összefoglaló jellemzése	79

6. Képi tartalom	83
6.1 A képi feladatok teljesítményei	83
6.2 A képi feladatok fejlődési folyamatai	87
6.3 A képi szubtesztek eredményei	91
6.4 A képi teljesítmények összefüggésvizsgálata	94
6.5 A képi teljesítmények összefoglaló jellemzése	100
7. Formális tartalom	103
7.1 A formális feladatok teljesítményei	103
7.2 A formális feladatok fejlődési folyamatai	107
7.3 A formális szubtesztek eredményei	111
7.4 A formális teljesítmények összefüggésvizsgálata	114
7.5 A formális teljesítmények összefoglaló jellemzése	120
8. A kombinatív műveleti képesség mint egész	123
8.1 A kombinatív képesség struktúrája	123
8.2 A kombinatív képesség fejlődése	132
8.3 A tartalom és a struktúra kölcsönhatása	135
9. A kombinatív képesség fejlődését befolyásoló tényezők	149
9.1 A fejlődést befolyásoló tényezők statisztikai vizsgálatának lehetőségei	149
9.2 A rendszerezési és a logikai képesség	150
9.3 A tanulmányi eredmények és a társadalmi háttér	154
9.4 A független változók együttes hatása	158
Irodalom	161
Ábrák jegyzéke	169
Táblázatok jegyzéke	170
Jelölések és rövidítések jegyzéke	171
Függelék	173
A manipulatív tesztek	174
A képi tesztek	183
A formális tesztek	196
Contents	206

BEVEZETÉS

Az iskolai oktatás eredményesebbé tételét célzó kísérletek, kutató-fejlesztő munkák sokasága foglalkozik a képességfejlesztés lehetőségeivel. E munkákat az a szándék vezérli, hogy a képességek fejlesztése az oktató-nevelő munkában megfelelő súlyt kapjon. Ez a törekvés nem új. Azonban a kérdés elméleti háttérének kidolgozatlansága, alapvető ismeretek, gyakorlati megoldások, tapasztalatok hiánya miatt többnyire jámbor szándék maradt, vagy jelszavak, nem ritkán túlzó, egyoldalú nézetek hangoztatásában merült ki.

Az utóbbi évtizedekben a gondolkodás pszichológiájának kutatásában jelentős változások tapasztalhatók. Különösen a memóriakutatás és a számítógéptudomány eredményei által megtermékenyített kognitív pszichológia területén halmozódott fel a pedagógia számára is nélkülözhetetlen teoretikus ismerethalmaz és empirikus információtömeg. A pedagógiai kutatás-fejlesztés egyik nagy feladata, hogy ezeket az eredményeket a gyakorlati munkába átáramoltassa.

A pszichológia eredményeinek feldolgozásán és az iskolai oktatás mindennapos gyakorlatának megváltoztatására irányuló szerteágazó fejlesztő munkán túl azonban szükség van sajátosan pedagógiai indíttatású alapkutatásokra is. Olyan vizsgálatokra, amelyek a gyakorlati feladatok eredményesebb megoldása érdekében az elméleti alapok újrafogalmazásáig, a konceptualizálásig nyúlnak vissza, majd a jelenségek összefüggéseinek tapasztalati feltérképezése után közelednek az iskolai gyakorlat átalakításához.

Ez a könyv egy ilyen kutatási program első fázisának részeként készült. A kombinatív képesség fejlődésének és szerkezetének feltárására irányuló mérések eredményeit foglalja össze. Bár témája e cél által meghatározottan pontosan körülhatárolt, több kutatási folyamatba is be van ágyazva. Ezek közül mindenekelőtt *A műveleti képességek rendszere és fejlődése* című kutatási témára kell utalnunk, amely két másik, a logikai és a rendszerezési képességgel együtt e vizsgálatok konkrét keretétül szolgált. Ennek a kutatási témának már több részeredményét publikáltuk, a három műveleti képesség szerkezetének és fejlődésének összefoglaló elemzése pedig három önálló kötetben jelenik meg.

A vizsgálat tágabb elméleti kereteit és a rendszerezési képességet Nagy József (1987), a logikai képességet Csirikné Czachesz Erzsébet (1988) könyve mutatja be.

A műveleti képességek vizsgálatának ez a szakasza a tágabb beágyazottságot tekintve is több kutatási folyamat részét képezi. Folytatja az értékelés terén végzett kutatások hagyományait, felhasználja azok tapasztalatait. Ugyanakkor közvetlen előkészítése a jelenleg folyamatban levő kísérletsorozatnak, amely a műveleti képességek fejleszthetőségét, iskolai fejlesztésének lehetőségeit méri fel (Csapó, 1987a, c; Vidákovich, 1987; Nagy – Gubán, 1987).

E könyv közelebbi tárgyának, a kombinatív képesség empirikus vizsgálatának ugyancsak vannak közvetlen előzményei, és már folyamatban van az ennek eredményeit is felhasználó fejlesztő kísérlet (Csapó, 1987b). A kombinatív képesség fogalmának elméleti körülhatárolásával egy korábbi tanulmányomban már részletesen foglalkoztam. A mérőeszközök elkészítése, a vizsgálat lebonyolítása és az eredmények értékelése során azonban az elméleti koncepció is tovább csiszolódott. A kombinatív képesség kutatásának előzményeit, nemzetközi és a hazai irodalom munkánkban felhasználható eredményeit, vizsgálatunknak a fontosabb kutatási paradigmákhoz való viszonyát az első fejezetben mutatom be. Az empirikus munka elméleti kereteit az első fejezetben foglalom össze. Nem foglalkozom viszont az eredmények alkalmazásának lehetőségeivel, a konkrét pedagógiai munkát befolyásoló konzekvenciáival, melyek közlése a fejlesztő kísérletek tapasztalatainak összegzésével kapcsolatos feladat lesz.

A kombinatív képesség részletes empirikus vizsgálata nemzetközi keretek között is új területnek számít. Néhány elemével klasszikus kísérleteiben Piaget foglalkozott, azonban a kombinativitás szisztematikus feltárása a genfi iskola munkássága nyomán meginduló szerteágazó gondolkodás-kutatás egyik irányzatában sem teljesedett ki. Ellentétben a logikai műveletekkel vagy a csoportstruktúrákkal, nem vált a különböző pszicho-matematikai kutatások központi problémájává sem, és az új matematika tanításával kapcsolatos kísérletekben sem kapott fontosságának megfelelő szerepet. Vizsgálatunkban új megközelítést jelent egy képességnek műveletek rendszereként való leírása, továbbá a gondolkodás egy konkrét, pontosan körülhatárolt területének a részletekbe menő, rendkívül nagy felbontású elemzése.

Az eredmények bemutatása talán hatásosabb lenne a végeredményből kiindulva, az egésztől a részek felé haladás elvét követve. A tudományos alaposságnak, a szigorúbb felépítésnek azonban jobban kedvez a vizsgálat leírásának hagyományos menete. Ezért az előzmények és az elméleti háttér összefoglalása után bemutatom a vizsgálat eszközeit, majd magát a felmérést, az adatfelvételt és -feldolgozást. Ezután három analóg szerkezetű fejezetben a három különböző tartalmú vizsgálati eszközzel végzett mérés eredményeit részletezem a feladatonkénti fejlődéstől a szubtesztiek, tesztek teljesítményé-

nek bemutatásán át az adott szint strukturális elemzéséig. A nyolcadik fejezetben a kombinatív képességnek mint egésznek a fejlődését és struktúráját elemzem a teljes empirikus anyag felhasználásával. Végül az utolsó fejezetben a kombinatív képesség fejlődését befolyásoló tényezőkkel foglalkozom.

Munkámhoz nyújtott támogatásáért mindenk előtt Nagy József professzornak szeretnék köszönetet mondani, aki a könyvben bemutatott vizsgálatok kereténél szolgáló kutatási téma vezetője volt. Ugyancsak köszönöm közvetlen munkatársaimnak, Csirikné Czachesz Erzsébetnek és Vidákovich Tibornak a kézirat első változatához fűzött értékes észrevételeiket, továbbá Kürti Istvánné és Joó András gondos lektori munkáját.

1. ELŐZMÉNYEK ÉS PROBLÉMÁK

Az emberi kombinativitás természetének megértésére való törekvés szinte egyidős a filozófiai gondolkodással. A tudásunk eredetével foglalkozó ismeretelméleti koncepciók többnyire nem kerülhették meg a kérdést: miképpen képes az ember tárgyak, dolgok, szimbólumok, fogalmak változatos összeállításait, gyakran eredendően új, soha nem tapasztalt kombinációit létrehozni? A kombinativitás (melyen a kombinatív képesség fogalmának 2. fejezetbeli szabatos kifejtéséig annak köznyelvi tartalmát, vagyis a dolgok, elemek változatos egybeszerkesztésével, összeállításával kapcsolatos jelenségeket értjük) problémája tudományos megismerés tárgyává két diszciplínában, a matematikában és a pszichológiában vált. Így a kombinatív képesség vizsgálatának elméleti megalapozása során is e két tudományág eredményeire támaszkodunk.

A matematikai kombinatorika fejlődését, alapjainak szerkezetét korábban részletesen elemeztük (Csapó, 1979). Ennek az elemzésnek az eredményeit a kombinatív képesség hipotetikus rendszerének felvázolása során fogjuk felhasználni. Ebben a fejezetben pedig a pszichológiai és pedagógiai kutatásokat fogjuk áttekinteni. Elsőként a kombinativitás problémájának történeti alakulásával foglalkozunk néhány fejlődési állomás felidézésével. Pszichológiai jelentősége és munkánkra gyakorolt kiemelkedő hatása miatt külön is részletesen elemezzük Piaget munkásságát, majd a kombinatív műveletekkel kapcsolatos vizsgálatokat mutatjuk be.

1.1 A kombinativitás problémájának alakulása a pszichológiában

Az emberi gondolkodásban megjelenő kombinativitásról kialakított elméletek történetében a matematikai kombinatorika fejlődésében is mérföldkövet jelentő Leibniz munkásságáig érdemes visszatekinteni. A filozófus-matematikus Leibniz olyan egyetemes módszert kívánt találni, amely a gondolkodás minden tévedését kiküszöböli, új találmányokhoz, felfedezésekhez vezet. Így jutott el a kombinatorika alapproblémáihoz. Kombinatorikával foglalkozó

könyvében (*Dissertatio de arte combinatoria* címmel jelentette meg 1666-ban) a kombinálás, permutálás művészetéről ír. Bár megfontolásai nem tekinthetők szigorú értelemben vett pszichológiai elméletnek, később más, ismeretelméleti munkáihoz hasonlóan jelentős hatást gyakoroltak a különböző pszichológiai irányzatokra.

Mivel a pszichológiai megismerés csak sokkal később különült el a filozófiai gondolkodástól, a kombinativitással összefüggő többi korai koncepciót is átszövik a spekulatív mozzanatok. Ezek a megfontolások érdekes módon az emberi kombinativitással csak mint a tudatos folyamatok háttérében meghúzódó mechanizmusokkal számolnak.

A kombinativitás problémája a pszichológiában először a fantáziával, a képzelettel kapcsolatban merül fel. Az első átfogó elméleti koncepciót az asszociációs pszichológiai iskola dolgozza ki. Az asszociációs pszichológia felfogása szerint a képzeletnek alapvetően két formája van. A reprodukatív képzelet csupán a valóságban is meglévő jelenségeknek, korábban átélt benyomásoknak, képeknek a reprodukálása. Ezzel szemben az alkotó képzelet a valóságban nem tapasztalt módon rendezi át a valóság egyes elemeit, az elemek új kombinációit hozza létre. Az elmélet értelmében a képzelet képes a meglévő, korábban észlelt elemek nagyszámú új, a valóságban nem tapasztalható kombinációját létrehozni, nem képes azonban új elemeket alkotni. Az asszociációs pszichológia nem ad számot arról, hogy milyen módon jönnek létre az új kombinációk, vagy pedig azok létrejöttét véletlenszerűnek tekinti.

Wundt álomelmélete az álmot is a valóságban megélt benyomások mint elemek teljesen új, szokatlan, néha fantasztikus kombinációjaként értelmezi. Az egyes képek kombinálódása itt is véletlenszerű, illetve az agykéregben lejátszódó elektromos folyamatoktól függ. Ez a felfogás a kombinativitás statikus képét festi, a kombinációk képződését lényegében az intellektus működésének tudattalan mechanizmusaként, az álom keletkezésének értelmezésében egyenesen fiziológiai folyamatként kezeli. Ilyen alapon az emberi kombinativitás csupán a filogenetikai fejlődés során létrejött biológiai produktum lenne.

Semmi okunk nincs elvetni azt a gondolatot, hogy az agykéreg elektromos folyamatai vagy az intellektus tudattalan mechanizmusai "automatikusan" ingerek, benyomások, képzetek nagyszámú kombinációját termelik ki, ha azonban az ontogenetikus fejlődés tényeivel, különösen pedig a tanulás szerepével is el akarunk számolni, nem szűkíthetjük le az alkotó fantáziát, általában az alkotóképességet a kombinativitásra, és a kombinativitást is többnek kell tekintenünk az előzőekben jellemzett tudattalan folyamatoknál.

Az asszociációs pszichológia képzeletfelfogását bírálva a legfontosabb hiányosságot Vigotszkij a következőképpen fogalmazza meg: "A probléma másik oldalát azonban – amely annak megmutatása lett volna, hogy mi a képzeletben annak a tevékenységnek az alapja, amely lehetővé teszi a felhalmozódott benyomások teljesen új formában, új kombinációban való elképze-

lését – nem oldották meg, hanem egyszerűen megkerülték." (Vigotszkij, 1971. 392. o.) Vigotszkij a képzelet fejlődésében nagy szerepet tulajdonít a tapasztalatoknak, különösen pedig a beszéd megjelenésének és a fogalmi gondolkodás kialakulásának. A képzelet problémáinak megoldását a genetikus, az eredetet és a fejlődést is elemző megközelítésben, a képzelet és a gondolkodás rendszerként való felfogásában, összefonódásuk, kapcsolataik vizsgálatában látja.

Rubinstein az elemek kombinálását szintén a képzelet egyik működési mechanizmusának tekinti, bár kiemeli, hogy ez nem az egyetlen mechanizmus: "A valóság észlelése nem megváltoztathatatlan elemek kötegeiből, csomóiból vagy mechanikus halmazából áll. Minden képződményét átalakítja a képzelet. Ezek az átalakítások rendkívül sokfélék, közéjük tartozik a kombináció, mint a fogások egyike, de nem lehet erre korlátozni: a kombináció csak az egyik fajtája vagy fogása a képzelet átalakító tevékenységének. Ennek eredményeként nem változatlanul adott elemek vagy vonások új kapcsolata, vagy kombinációja keletkezik, hanem egységes új kép, amelyben az egyes vonások nem egyszerűen összegződnek, hanem át is alakulnak, általánosítódnak. A kombinálás csak 'mechanizmus', hatása rendszerint valami olyan tendenciának engedelmessé válik, amely meghatározza a kombinálandó mozzanatok összeválogatását és értelmet lehel azokba." (Rubinstein, 1964. 519. o.) Adós marad azonban Rubinstein is annak felvázolásával, milyen egyéb mechanizmusok, átalakítások jöhetnek számításba a kombinálás mellett, és milyen kapcsolatban állnak azok egymással.

Az alkotó képzelet problémája átvezet az alkotó gondolkodás, az alkotóképesség, a kreativitás kérdéskörébe. E fogalmak egymáshoz való viszonya a pszichológiában még nem teljesen tisztázott. Gyakran egymás szinonimáiként használják őket, terjedőben van azonban az a felfogás is, mely szerint az alkotóképesség az általánosabb, az alkotó gondolkodás és az alkotó képzelet ennek csupán részét képezi (ld.: Franus, 1979).

Mint az előzőekből is kitűnt, a kombinativitás korai pszichológiai értelmezései az alkotóképesség kérdéseivel kapcsolódtak. A kifejezetten az alkotóképesség vizsgálatára koncentráló kreativitáskutatás különböző elméletei és modelljei ugyancsak kiemelkedő szerepet tulajdonítanak az alkotóképességben a kombinativitásnak.

Az alkotóképességet, az alkotás folyamatát Leibniz mellett egy másik matematikus, Poincaré is összekapcsolta a kombinativitással. Elképzelése szerint a matematikai alkotás folyamatában a tudatos szint alatt az összekapcsolható elemek nagy számú kombinációja képződik, és ezek közül – mint egy szűrőn keresztül haladva – csak azok tudatosulnak, amelyek bizonyos esztétikai követelményeknek eleget tesznek (Poincaré, 1908).

Az asszociációs pszichológia koncepciójára építve dolgozta ki kreativitáselméletét S.A. Mednick. Szerinte az alkotó folyamat lényege az, hogy olyan új képzettársítás-kombinációk jönnek létre, amelyek megfelelnek bizonyos

hasznossági feltételeknek. Változatos kombinációkat azok az emberek képesek produkálni, akik távoli, a megszokott környezetben össze nem tartozó dolgok között létesítenek kapcsolatot. E megfontolás alapján dolgozta ki az alkotóképesség mérésére a "*Remote Associations Test*"-et, amely lényegében az asszociációk változatosságával és szokatlanságával jellemzi a kreativitást (Mednick, 1962).

Guilford ismert kreativitáselméletét empirikus alapokra, pszichometriai vizsgálatainak eredményeiből kiindulva építette fel. Kifejezetten nem foglalkozik az alkotó folyamat mechanizmusával és e mechanizmusokban a kombinálás szerepével, azonban kreativitásmodelljében a fluencia faktorai tartalmazzák a kombinatív mozzanatokot (Guilford, 1950, 1959). Egy másik, ugyancsak gyakran idézett modellben, Lowenfeld kreativitás-modelljében a variabilitás faktorai foglalnak magukba kombinatív mozzanatokot (Lowenfeld, 1947).

Az előző rövid utalásokból is kitűnik, hogy az alkotó képzelet és a kreativitás pszichológiai elméletei érintik ugyan a kombinativitást, kiemelik szerepét az alkotó folyamatban, helyét, struktúráját, viszonyát az egyéb részekhez, eredetét, kialakulásának folyamatát azonban ezek a megközelítések nem tisztázzák. Általában is jellemzi a kreativitás kutatását a fenomenológiai megközelítés, a jelenség globális leírása, a környezeti tényezők, feltételek, személyiségvonások szerepének vizsgálata, és kisebb hangsúlyt kap a jelenség mélyén meghúzódó mechanizmus.

A különböző gondolkodáslélektani vizsgálatokban gyakran találkozunk kombinatorikai jellegű problémákkal (pl.: Bruner, 1956, 1973, vagy Dienes képességfejlesztő matematikai játékaiban), ezek azonban csak az eszköz szerepét játsszák, elemzésükkel itt nem foglalkozunk.

1.2 A Piaget-iskola

A kombinatív képesség tanulmányozásában új fejezetet jelent Jean Piaget és iskolája. Piaget munkássága a kombinatív képesség megismerése terén legalább három szempontból nagy előrelépést jelent. (1) Felvázolja a kísérleti fejlődéslelektan ismeretelméleti hátterét, melynek keretében tisztázza az értelem műveleti struktúráinak, így egyben a kombinatív műveleteknek is az eredetét. (2) Új megvilágításba helyezi a kombinativitás és a logikus gondolkodás viszonyát, feltárja a kombinatív műveletek szerepét a gondolkodásban. (3) Néhány kombinatív művelet kialakulását, fejlődését empirikus vizsgálatai alapján leírja.

Piaget kísérleti munkáit ismeretelmélete, a genetikus episztemológia foglalja keretbe. A filozófia ősi kérdését – honnan származik az emberi tudás? – a kísérleti fejlődéslelektan nyelvén fogalmazza meg, és ezzel megnyitja az utat az empirikus vizsgálatok előtt. Elméletének központi gondolata az,

hogy tudásunk forrása nem csupán az érzékelés és az észlelés, hanem a cselekvés is (Piaget, 1972). A cselekvés; a tevékenység során a környező valóságon végzett műveletek belsővé válnak, kiépülnek a gondolkodás műveleti struktúrái. Azaz az értelem műveleti struktúrái a tevékenységen keresztül a valóság, az anyagi világ struktúráit képezik le. Ezért Piaget szerint mivel a matematika is a valóság struktúráit tükrözi, az értelem műveleti struktúrái és a matematika legáltalánosabb struktúrái megegyeznek, és ezt az egyezést kísérleteinek eredményei által is bizonyítottoknak véli (Piaget, 1970, 1971).

A második kérdés, amit meg kell vizsgálnunk, az, hogy milyen szerepet tulajdonít Piaget a kombinatorikának a gondolkodás fejlődésében. Piaget szerint a logikai műveletek kialakulásának folyamatában a konkrét műveletekről a formális műveletekre való áttérés a 16 kétváltozós logikai művelet megjelenésével jellemezhető. A 16 kétváltozós logikai művelet kialakulását pedig egy kombinatorikai struktúra kiépülése teszi lehetővé. Az elmélet bemutatása előtt foglaljuk össze, miben áll a 16 kétváltozós logikai műveletből álló rendszer kombinatorikai természete.

Legyen két ítéletünk, melyeket jelöljünk p -vel és q -val. Mindkét ítélet lehet igaz vagy hamis, vagyis igaz lehet a p a \bar{p} , a q és a \bar{q} ítéletek bármelyike. Ezeket konjunkcióval összekapcsolva négyféle összetett ítéletet kapunk:

$$(p \wedge q), (p \wedge \bar{q}), (\bar{p} \wedge q), (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Itt a párosítás során lényegében a $\{p, \bar{p}\}$ és a $\{q, \bar{q}\}$ halmazok Descartes-féle szorzatát állítottuk elő, a rendezett párok közé a konjunkció jelét téve. Kérdés mármost az, hogy a négy konjunkció igazságértékét tekintve milyen lehetőségeink vannak? Lehet, hogy egy sem igaz, ez az ellentmondás esete. Lehet az, hogy a négyből egy igaz, mégpedig 4 ilyen eset lehetséges. Lehet az is, hogy valamelyik kettő igaz; négy elem kéttagú kombinációjáról lévén szó, 6 ilyen eset van. Háromtagú kombináció szintén 4 van, és végül lehet, hogy mind a négy összetett ítélet igaz. Ezeket a kombinációkat sorra véve a $\{(p \wedge q), (p \wedge \bar{q}), (\bar{p} \wedge q), (\bar{p} \wedge \bar{q})\}$ halmaz összes részhalmazát képeztük. A részhalmazokból, elemeket diszjunkcióval összekapcsolva újabb összetett ítéleteket alkothatunk, mégpedig 16-ot. Ez a 16 ítélet éppen a 16 kétváltozós logikai műveletnek felel meg, konjunkciókkal és diszjunkciókkal felírva (ld. az 1. táblázatot).

Megjegyezzük még, hogy az összes művelet igazságmátrixának képzése az igaz és a hamis lehetőségek négytagú ismétléses variációja ($2^2=16$), és így egyben a 2 hatványainak és a részhalmazok képzésének egymással való megfeleltethetőségét is szemlélteti.

A 16 kétváltozós logikai művelet rendszerében tehát három kombinatorikai műveletet fedezhetünk fel. Ezek: (1) két kételemű halmaz Descartes-féle szorzatának képzése, (2) két elem négytagú ismétléses variációjának képzése és (3) egy négyelemű halmaz összes részhalmazának képzése. Piaget ez utóbbinak tulajdonít integráló szerepet. A négy elem összes részhalmazának halmaza az egyesítés és a metszés műveleteivel értelmezett hálóstruktúra az, ami a

gondolkodás formális szintjének műveleti rendszerét egységbe foglalja. (Már itt megjegyezzük, hogy a vizsgálathoz használt feladatrendszerünkben mindhárom művelet szerepel.)

1. táblázat. A 16 kétváltozós logikai művelet kombinatorikai szerkezete

Lehetséges ítéletpárok $p \wedge q$ $p \wedge \bar{q}$ $\bar{p} \wedge q$ $\bar{p} \wedge \bar{q}$				Igaz ítélet- párok kapcsolata	Logikai művelet jele neve
h	h	h	h	0	$p \leftrightarrow q$ kontradikció
h	h	h	i	$(\bar{p} \wedge \bar{q})$	$p \vee q$ sem-sem
h	h	i	h	$(\bar{p} \wedge q)$	$\bar{q} \Rightarrow p$ fordított impl. tagad.
h	h	i	i	$(\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$[p]q$ \bar{p} függetlensége
h	i	h	h	$(p \wedge q)$	$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ az implikáció tagad.
h	i	h	i	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$p[q]$ \bar{q} függetlensége
h	i	i	h	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)$	$p \vee q$ kizáró vagy
h	i	i	i	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$p \perp q$ összeférhetetlenség
i	h	h	h	$(p \wedge q)$	$p \wedge q$ konjunkció
i	h	h	i	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$p \equiv q$ ekvivalencia
i	h	i	h	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)$	$p[q]$ q függetlensége
i	h	i	i	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$p \Rightarrow q$ implikáció
i	i	h	h	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$	$[p]q$ p függetlensége
i	i	h	i	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$q \Rightarrow p$ ford. implikáció
i	i	i	h	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$	$p \vee q$ diszjunkció
i	i	i	i	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	$p \equiv q$ tautológia

Az előzőek alapján tömören összegezhetjük Piaget kísérleti eredmények-re alapozott elméletének lényegét, mely a logikai műveletek kialakulását a következőképpen magyarázza. A konkrét műveletek szintjén megjelenő osztályozások, soralkotások, megfelelések fokozatosan rendszerré szerveződnek. Kialakulnak az ítéletekből álló párok ($p \wedge q$, $p \wedge \bar{q}$, ...), majd a lehetséges és igaz párosítások megkülönböztetése elvezet az ítéleti műveletek kialakulásához. Piaget szavaival: "Általánosan fogalmazva meg tehát, kísérletünknek az a tanulsága, hogy szoros kapcsolat áll fenn egyrészt a kombinatorikai műveletek, másrészt a formális vagy ítéletközi műveletek felépítése vagy együttes szerkezete között; ugyanakkor, amikor a kísérleti személy kombinálja a tapasztalati összefüggésben adott elemeket vagy tényezőket, kombinálja az ítéleti kijelentéseket is, amelyek a ténybeli kombinációk eredményeit fejezik ki, és ezáltal megalkotja a konjunkciók, diszjunkciók, kizárások stb. kétváltozós műveleteit. Nos ez a kölcsönös kapcsolat annál kevésbé meglepő, mert alapjában véve

azonosság: az ítéleti műveletek rendszere valójában egy kombinatorika éppúgy, ahogy a tapasztalati adottságokra vonatkozó műveleteknek sincs más céljuk a kísérleti személy gondolkodásában, mint hogy ilyen logikai összefüggések létrehozását lehetővé tegyék." (Inhelder–Piaget, 1967. 119. o.)

Hasonló módon, ugyancsak az ítéletpárok kialakulásából származtatja Piaget a logikai műveletrendszert szervesen kiegészítő valószínűségi gondolkodást, a valószínűségfogalom és a valószínűségi összefüggés fogalmának kialakulását is, a következőképpen.

Ha a p és q ítélet párosításának négyféle lehetőségét, a $(p \wedge q)$ -t, $(p \wedge \bar{q})$ -t, $(\bar{p} \wedge q)$ -t és $(\bar{p} \wedge \bar{q})$ -t nem lehet két csoportba, igaz, a valóságban előforduló és a valóságban meg nem jelenő kapcsolatok csoportjába sorolni, hanem mindegyik párosítás megjelenhet, de előfordulásuk gyakorisága különböző, akkor az ilyen ítéletek közötti kapcsolat mérlegelése a valószínűség fogalmának megjelenéséhez vezet. A $(p \wedge q)$, $(p \wedge \bar{q})$, $(\bar{p} \wedge q)$, $(\bar{p} \wedge \bar{q})$ párok előfordulásának aránya a p és q ítélet (adott jelenségnek az ítéletekben kifejeződő tulajdonságai) közötti asszociáció szorosságára jellemző, így a gyermek gondolkodásában a megfelelő folyamatok a valószínűségi összefüggések, a korreláció elemi fogalmának kialakulását eredményezik.

A valószínűségi gondolkodás kialakulásának Piaget alapvető jelentőséget tulajdonít, épp ezért a kialakulás folyamatát részletes vizsgálat tárgyává teszi (Piaget–Inhelder, 1951). Értelmezése szerint a valószínűségi gondolkodás két különböző, egymást kiegészítő fejlődési folyamat szintézisének eredménye. Egyrészt kialakul a véletlen fogalma, az egyes jelenségek, események véletlenszerűségének, deduktívan le nem vezethetőségének, ki nem következtethető jellegének megértése. Másrészt megjelenik a lehetőségek teljességének számbavételére, áttekintésére alkalmas operatív rendszer, vagyis a kombinatív műveletek rendszere. E kettő együttes fejlődésére van szükség annak felismeréséhez, hogy a nagyszámú, egyenként véletlenszerű esemény összességében meghatározott törvényszerűségeknek tesz eleget. Megjegyezzük, hogy Piaget ezen a ponton túl szoros analógiát tételez fel a matematikai valószínűség kombinatorikai értelmezése és a szubjektív valószínűség kialakulása között. Elképzelhető ugyanis kvantitatív jegyekkel is rendelkező valószínűségfogalom kialakulása a kombinatorikai sémáktól függetlenül is.

Végül Piaget munkáinak azokkal a részeivel kell foglalkoznunk, amelyek közvetlenül a kombinatív műveletek kialakulásának folyamatát vizsgálják (Piaget–Inhelder, 1951, VII., VIII., IX. fejezet ill. Inhelder–Piaget 1967, VII. fejezet). E megfigyeléssorozatok lényegében négy kombinatorikai feladattal foglalkoznak: a kombinációk képzésével, a permutációk képzésével, az ismétléses variációk képzésével és halmaz összes részhalmazának képzésével (az összes különböző elemszámú kombináció képzésével).

A kombinációk képzését vizsgálva a k.sz. elé különböző színű korongokból egy-egy halmazt tettek, arra kérve a k.sz.-t, hogy készítsen belőlük annyi

párt, amennyit csak tud. Három és négy, illetve idősebbeknél (II. és III. stádium) négy és hat szint használtak, fiatalabb k.sz.-nél (kb. 7 éves korig) az ismétlődést (azonos színű korongokból álló párok) is megengedve. Eredményeik szerint az első stádiumra a párok tapasztalati összeállítása, a próbálgatás jellemző. A második stádium a rendszer keresésének, különböző, a teljes felsoroláshoz nem vezető részrendszerek kialakulásának az időszaka. Itt Piaget öt részrendszert figyelt meg. Ezek (példaként az A, B, C, D, E, F elemekből képezve) a következők: (1) az egyszerű justapozíció (AB, CD, EF); (2) ennek az elvnek az alkalmazása úgy, hogy a párok elemei átfedik egymást (AB, BC, CD, DE, EF); (3) ellentétes irányú változtatások, vagyis a sorrendben következő elemeket kihagyva képezett párok (AC, BD, CE, DF); (4) szimmetrikus párok képzése, ami azonban még mindig a justapozíció eszméjének van alárendelve (AB, FE, BC, ED, CB); és végül (5) a szisztematikus felsorolás különböző részei, amelyek azonban egy ponton elakadnak, a k.sz. jó algoritmust talál, de nem veszi észre, hogy ezen az úton eljuthat a teljes felsorolásig (pl. $AB, AC, AD, AF, BC, BD, BE, BF$). Ezek a részrendszerek egymással vagy a véletlenszerű próbálgatással kombinálódva teszik lehetővé az összeállítások nagyszámú, de nem teljes felsorolását a második stádiumban. Végül a harmadik stádiumban kialakul a teljes felsorolást lehetővé tevő szisztéma, amely már egyetlen elv következetes végigvitelével jut el a teljes megoldáshoz.

A permutációk képzését két, számértékben különböző feladattal vizsgálták: három, illetve négy különböző színű korong összes lehetséges sorrendjét kellett kirakni. Az első stádiumra itt is mindenféle rendszer teljes hiánya jellemző. A második stádiumban megjelennek a részrendszerek. Első mozzanatként megjelenik az elkészített permutációk kezdőszín szerinti csoportosítása, majd a szimmetriák kihasználása újabb sorrendek előállítására, végül a színek ekvivalenciájának felismerése és az ebből fakadó újabb képzési lehetőségek már a teljes rendszer kiépülésének kezdetét jelzik. A harmadik stádiumban alakul ki a permutációk képzésének a teljes rendszere. Piaget azonban a permutációk képzését a kombinációk képzésénél összetettebbnek tartja, és kialakulását csupán a IIIB stádium végére (14-15 éves kor) teszi. Ezt azzal magyarázza, hogy bár két elem felcserélése elemi művelet, a felcserélések egymásutáni többszöri ismétlődése azonban már megköveteli a műveleteken végzett műveleteket, ez pedig csak a konkrétól elvonatkoztatva a formális gondolkodás szintjén lehetséges (Piaget – Inhelder, 1951. 206. o.).

Az ismétléses variációk képzésének vizsgálata során papírkártyákra rajzolt vonatfigura, illetve nagyobb gyerekeknek szám szolgált eszközül. Három, illetve ugyancsak a nagyobbaknál négyféle elemből kellett most már a sorrendet is tekintetbe véve különböző párokat alkotni. Az első stádiumot itt is a rendszertelenség jellemzi. A második stádiumban kialakuló részrendszerekre kezdetben jellemző az ismétlődést tartalmazó és nem tartalmazó párok elkülönülése. Az analógiákon alapuló párképzés (pl. AA alapján BB és CC) elvezet a sziszte-

matikus felsorolás részeinek kialakulásához. A IIA stádiumban még mindig jellemző az azonos és a különböző elemekből álló párok elkülönülése, csak a IIIB stádiumban jelenik meg az egy alapelveen nyugvó szisztematikus felsorolás.

Az összes részhalmaz képzését Piaget a logikai műveletek kialakulásával összefüggésben vizsgálja. Alapvetően azt kívánja eldönteni, hogy vajon az a kombinációrendszer, amely "rejtetten" működik a 16 kétváltozós logikai műveletben, vajon önmagában, közvetlen kombinatorikai problémák megoldásában működik-e. E célra négy, különböző vegyületeket tartalmazó szintelen folyadékkal telt üveget, valamint egy cseppentős üvegben indikátort kapnak a k.sz.-ek, és megmutatnak nekik egy ötödik edényt, melyben az előző folyadékokból készített, ugyancsak szintelen folyadék van. Ez utóbbihoz indikátort cseppentve jellegzetes színreakció lép fel. A feladat a bemutatott színreakció produkálása a négy folyadék és az indikátor segítségével. Itt az összes lehetőséget a négy különálló folyadéknak a kettőnkénti, hármankénti kombinációkból, illetve a négy folyadékból együtt képezett elegy indikátoros vizsgálata jelentené, ami pedig négy elemből az összes részhalmaz képzésének felel meg. Az első stádiumra itt is a teljes rendszertelenség jellemző. A IIA stádiumban a négy folyadék egyenkénti, valamint a négy együttes vizsgálata a jellemző. A IIB stádiumban a lehetőségek számbavétele ugyancsak a folyadékok egyenkénti, majd a négy együttes vizsgálatával kezdődik, ez azonban a kettőnkénti és hármankénti kombinációk rendszertelen, próbálkozásos képzésével folytatódik. A rendszeres kettőnkénti és hármankénti kombinációk a IIIA szinten jelennek meg, míg a IIIB szinten a rendszer "egyensúlyba" jut", amit a teljes kombinációrendszer egységes, szisztematikus felépítése jellemez. Az egyes stádiumokban mutatkozó megoldási módok és a logikai műveletek kiépülésének összevetésével vonja le Piaget a következtetést: az ítéleti műveletekben meglévő kombinatorikai rendszer és a közvetlen kombinatorikai feladatok megoldása során alkalmazott műveletrendszer megegyezik. Piaget feladatainak megfelelő struktúrájú feladatok a mi tesztleinkben is szerepelnek, így az eltérő vizsgálati technika mellett is lehetőség adódik bizonyos összehasonlításokra.

A felvázolt koncepció a gondolkodás műveletrendszerének egységes és átfogó értelmezését adja, és a kombinatív műveletek vizsgálata is mindmáig a legrészletesebbek közé tartozik. Azonban az empirikus anyag összegyűjtésében, értelmezésének több pontján problematikus, megkérdőjelezhető vagy éppen továbbgondolandó mozzanatot találunk. Elsősorban nem a piaget-i életművet ért általános bírálatokra (ld.: Cohen, 1983; Modgil and Modgil, 1982) gondolunk, amelyek nyomán Piaget maga is újraértékelte korábbi tételeit (pl. a stádiumok mérev életkorhoz rendelése), vagy mások fejlesztették tovább az alapgondolatot (pl. Galperin az "értelmi cselekvések" szakaszos formálásának elméletében; ld. pl.: Galperin, 1966, 1974), vagy amelyek koncepcionális ellentétek miatt teljesen elutasítják Piaget-t; csupán azokra a

mozzanatokra, amelyek miatt a kombinatív műveletek leírása nem vált teljesé.

Összegezve, Piaget lényegében csak négy kombinatív művelet kialakulását vizsgálta egy vagy két konkrét számérték mellett, és ezeket is csak a logikai műveletekkel és a véletlen fogalmával kapcsolatban. Ném fordított azonban figyelmet arra, hogy a műveletek számértékben különböző szélesebb spektrumával kísérletezzen, vagy, hogy a kombinatív műveletek egymáshoz való viszonyát tisztázza és az egész kombinatív képességet mint rendszert építse fel. Ez abból a felfogásból is következik, mely a kombinativitást mint az egész logikai műveletrendszert, sőt a gondolkodás más területeit is átható, azonban mégis másodlagos, a háttérben meghúzódó, integráló szerepet játszó tényezőként kezelte.

1.3 A kombinatív műveletekkel kapcsolatos vizsgálatok

Piagetnek nagy hatása volt a XX. sz. második felének pszichológiájára, és az általa elkezdett munka a legtöbb területen követőkre talált. Számos irányzat alakult ki, mely a gondolkodást matematikai eszközökkel írja le, illetve a gondolkodás műveleti struktúráit tanulmányozza. Az e témakörökben megjelent sok ezer publikáció közül itt csak néhány jellemző összefoglaló munkára utalunk. Különösen sok vizsgálat tárgyát képezte a soralkotás és az osztályba-foglalás műveleteinek fejlődése (Nosofsky, 1984; Kingma and Reuvekamp, 1984), a csoportstruktúrák kialakulása, tanulása, a csoportstruktúrák közötti transzferhatás (Dienes and Jeeves, 1970). A logikai műveletek fejlődésével is több pszichológiai irányzat, műhely foglalkozik (Johnson-Laird, 1983). E területek gazdag kísérleti anyagával összehasonlítva még feltűnőbb, hogy a Piaget elméletében centrális szerepet betöltő kombinatorikai struktúrák átfogó vizsgálatára nem került sor. Szemben a logikai, rendszerezési vagy csoportstruktúrákkal, a kombinatorika nem vált a különböző pszicho-matematikai vizsgálatok központi kérdésévé, és nem kap a súlyának megfelelő szerepet a legtöbb új matematikatanítási koncepcióban sem.

Amíg a Piaget által feltárt többi műveletnek áttekinthetetlenül hatalmasra duzzadt irodalma van, a kombinatív műveletekkel kapcsolatos fontosabb publikációknak csaknem a teljes körét áttekinthetjük. Ezekre a munkákra általában az jellemző, hogy csak egy vagy néhány kombinatorikai feladatot használnak a vizsgálat során. Általában nem a struktúrát és a kombinatív jelleget emelik ki, hanem mereven ragaszkodnak (számértékekben, tartalomban, kontextusban) a Piaget által kialakított keretekhez, és fel sem vetik a piaget-i koncepció újrafogalmazásának, kiterjesztésének a lehetőségét vagy szükségességét, nem törekednek a kombinatív műveletek rendszerének tanulmányozására. Messze nem merítik ki a kombinatorika által kínált végtelen gazdagságot,

az alapvető kombinatív struktúrák sokféleségét. Rendszerint a kombinatorikai feladatokat csupán mint eszközt használják valamely jelenség, általában a gondolkodás formális szintjének a vizsgálatára.

Siegler és Liebert (1975) kísérletében a gyerekeknek egy villanyvasutat kell működésbe hozniuk úgy, hogy négy kapcsoló mindegyikét a megfelelő irányba kapcsolják. Az áramot valójában a kísérletvezető egy rejtett pedállal kapcsolta be, így készítette a gyerekeket arra, hogy mind a 16 ($2 \times 2 \times 2 \times 2$) lehetőséget megkeressék. Előzetes tréning nélkül a 10 és 13 éves tanulóknak 0, illetve 10 százaléka volt képes megtalálni az összes lehetőséget, míg azoknak, akik előzetesen megbeszélték a kérdést és analóg problémát oldottak meg, 70 illetve 100 százaléka volt sikeres.

Kishta (1974) amerikai-jordániai összehasonlító vizsgálatának egyik feladata a Piaget-től átvett színes gyöngy feladat. A k.sz.-eknek ötféle gyöngyből kellett kombinációkat képezni. A vizsgálat értékeléseként a megoldásokat a piaget-i stádiumokba sorolták, és azt hasonlították össze, hogy milyen a különböző fejlődési szinten állók aránya a két kultúrában.

Roberge (1976) a nem, az életkor és a tartalom dimenziói mentén vizsgálja három kombinatorikai feladat megoldását: a négyelemű és az ötelemű halmazok összes részhalmazának képzését, valamint négy elemből három kiválasztását.

Roberge és Flexer (1979) a formális műveleti gondolkodás vizsgálatára dolgozott ki tesztet, melyben szerepel egy kombinatorikai feladat is: négy kártya egyik felén betűk, a másikon számok vannak. A k.sz.-eknek a kártyákat felfordítva (de nem felcserélve) kell az összes (16) lehetőséget megtalálniuk. Ezt a tesztet több vizsgálatukban is felhasználták, melyek során a kombinatív műveletekről is gyűjtöttek adatokat (Flexer és Roberge, 1980, 1983; Roberge és Flexer, 1982). Eredményeiket azonban nem elemezték a kombinatív műveletek szempontjából, csupán a piaget-i stádiumok azonosítására törekedtek. Hasonló kombinatorikai feladatot használt Scardamalia (1977) is egy más jellegű probléma, az információ-feldolgozó kapacitás tanulmányozása során.

Néhány francia vizsgálat közvetlenebbül foglalkozik a kombinatív műveletekkel. Henriques-Christophides és Moreau (1974) a klasszikus piaget-i feladatokat alkalmazva vizsgálja a kombinatív műveletek és a gondolkodás formális szintjének viszonyát. Megfigyelésük szerint (ellentétben Piaget álláspontjával) a kombinatív műveletek nem feltétlenül alakulnak ki teljesen, mire a gondolkodás eléri a formális szintet.

Mendelsohn (1980, 1981), bár munkáiban csak a permutációk fejlődésére koncentrál, fontos szemponttal gazdagítja a kombinatív műveletek tanulmányozását, ugyanis a strukturális analízis mellett felveti a folyamat elemzésének a szükségességét. Kísérleti személyeinek (9-11 évesek) négy betű összes permutációját kell felsorolniuk. Eközben rögzítik, hogy milyen konstrukciókat hoznak létre a tanulók, majd elemzik, hogy milyen algoritmusok állnak (felte-

hetően) a permutációk létrehozásának folyamata mögött. A módszer hasonlít Piaget eljárásához, sajnos a kisszámú megfigyelés (20-20 fő) nem ad az általánosításra is alkalmas konzisztens eredményt.

Allaire-Dagenais (1985) longitudinális vizsgálatának egyik feladata ugyancsak a permutációk képzését igényli. A tanulókkal 12 és 16 éves koruk között évenként végzett méréseket. A vizsgált életkorban évenként 6-8 százalékos fejlődést tapasztalt.

Néhány vizsgálat egy-egy egyszerű kombinatorikai struktúra fejlesztésének a lehetőségét is felveti. Fishbein, Pampu és Minzat (1970) Piaget stádiumokkal kapcsolatos elméletét támadják meg azzal, hogy a tanuláshoz, tréninghez a fejlődést meggyorsító szerepét bizonyítják. Bár eredményeik közvetlenül nem érintik Piaget koncepcióját, mivel nem a permutációk megalkotásának képességét vizsgálják (és fejlesztik), hanem a tanulóknak a lehetséges különböző permutációk számára kell becslést adniuk, és az intenzív tréning hatására ez a becslés javul meg jelentős mértékben. Barratt (1975) 12 és 14 éves tanulókkal végzett rövid fejlesztő kísérletet, melynek során az idősebbekkel ért el jelentősebb javulást.

Amint a bemutatott tanulmányokból is kitűnik, a genfi iskola hagyományaihoz való túlságosan szoros kötődés behatárolja a kombinatív műveletek tanulmányozásának lehetőségeit. A problémát a koncepcionális keretek (stádiumok, a kombinatív műveletek és a formális szint közötti asszociáció), a módszerek és főképpen a széttöredezettség, a partikularitás, a rendszerbe foglalás igényének a hiánya jelentik. E munkákból néhány kombinatív művelet fejlődésének többféle oldalát megismerjük, azonban a vizsgálatok jellegéből következően nem kapunk teljes és egységes képet a kombinatív műveletek rendszeréről és fejlődésének fő tendenciáiról.

1.4 Kombinatív jellegű problémák néhány magyar pedagógiai-pszichológiai vizsgálatban

A kombinativitás, a kombinatív műveletek tanulmányozása érintőlegesen az újabb pedagógiai-pszichológiai irodalomban is előfordul. Ezek közül mutatunk be néhány magyarországi vizsgálatot.

Salamon Jenő (1973) a divergens jellegű problémamegoldást tanulmányozza. Az e célra használt mindkét feladat kombinatorikai jellegű: egy négyzetet kell egy vele egybevágó három, illetve négy részre vágott négyzettel az összes lehetséges módon lefedni. A feladat lényegében halmazok Descartes-féle szorzatának képzésével analóg, az összes lehetőség felsorolását egy fa alakú gráffal ábrázolhatjuk. Az egyik feladatban 8, a másikban 16 az összes lefedési lehetőség száma. Feladatrendszerünkben a Descartes-féle szorzatok képzésének d és f feladata rendelkezik hasonló struktúrával. Az eredmények

az érvényes lefedések és a hibás próbálkozások átlagában, illetve a lehetséges és megtalált variációk százalékában vannak megadva, így saját adatainkkal összehasonlíthatók (ld. az 5. fejezetet). Érdekes módon a feladatok manipulációs változatának megoldásában Salamon vizsgálatai szerint az általános iskola elsőől nyolcadik osztályáig nincs szignifikáns fejlődés (Salamon, 1973. 182. o.). Sajnos a vizsgálatot és a statisztikai számításokat olyan kis mintákkal (15 fő) végezték, hogy azok eredményeit csak főbb tendenciáiban tekinthetjük mérvadásnak.

Lénárd Ferenc a gondolkodás rugalmasságának fejlesztésére, az úgynevezett variációs képesség kialakítására dolgozott ki egy sajátos technikát, a "variációs tanítás" módszerét. Az eljárást elsősorban a matematika tanítása során alkalmazták, de több más tárgyban is kipróbálták. Lényege az, hogy egy egyszerű algebrai egyenletet az összes lehetséges formában felírunk, illetve egy kijelentést az összes lehetséges módon megfogalmazzunk.

A gyakorlás nagyrészt egyetlen struktúrának, a $3 \times 2 \times 2 = 24$ esetet tartalmazó szerkezetnek az elsajátítására irányul. Ez például az összeadás-kivonás műveletpár példáján a következőképpen adódik: az egyenlőségben szereplő három mennyiség bármelyike helyettesíthető az x ismeretlennel ($a+b=x$, $a+x=c$, $x+b=c$), mindegyik esetben felcserélhető a két összeadandó (pl.: $a+b=x$ alapján $b+a=x$), az így adódó 6 eset mindegyike felírható kivonással is (pl.: $a+b=x$ alapján $a=b-x$), majd a 12 egyenlőség mindegyikének felcserélhető a jobb és bal oldala (pl. $a+b=x$ alapján $x=a+b$), ez pedig összesen 24 lehetőség. A felsorolás matematikai szerkezetét tekintve a négy tevékenységet reprezentáló halmazok közötti Descartes-féle szorzatok képzésének feleltethető meg. Előfordulnak még e lehetőségek számát megkétszerező, illetve megfelező, azaz 48, illetve 12 esethez vezető felsorolások, valamint néhány esetben az ismétléses variációk képzésének és az ismétléses permutációk képzésének a műveletei is.

A szerző módszerét az általános iskola alsó tagozatától a középiskoláig több éven keresztül alkalmazta, továbbá részletes megfigyeléseket végzett a felsorolási stratégiák alakulását, fejlődését illetően is. Tapasztalatai szerint a módszer alkalmas a gondolkodás rugalmasságának fejlesztésére (Lénárd, 1978. 264-317. o., Lénárd, 1982).

A kísérletek során a felhasznált kombinatorikai struktúrához valóban sokféle tartalmú feladatot dolgoztak ki, nem törekedtek azonban eléggé a számbeli változatosságra (a 24-es struktúra dominált), sem pedig más műveletek alkalmazására, netán egy teljes műveletrendszer szisztematikus fejlesztésére. Így a variációs tanítás fontos lépés lehet a gondolkodás merevségét feloldó oktatási módszerek irányába, de emellett valószínűleg csak felvillantotta, viszont messze nem merítette ki a kombinativitás iskolai fejlesztésének lehetőségeit.

Kevésbé közvetlenül ugyan, de kapcsolódik a kombinativitás kérdéséhez a gondolkodási stratégiák problémaköre is. A kapcsolat mindkét oldalról érdekes. Egyrészt a különböző problémák megoldása során alkalmazott stratégiák változatosságában, flexibilitásában, különösen ismeretlen problémák esetében alkalmazott véletlenszerű próbálkozások során, illetve a stratégiák fejlődésének kezdeti fázisaiban megnyilvánuló kombinativitást érdemes vizsgálat tárgyává tenni, másrészt pedig a kombinatorikai feladatok megoldása során is kialakulnak sajátos megoldásmenetek, gondolkodási stratégiák. A gondolkodási stratégiák vizsgálatával és a flexibilitás elemzésével Kürtiné (1982) foglalkozik, a kombinatorikai felsorolások megoldásmeneteinek, a felsorolások stratégiáinak kérdését pedig idézett munkáikban Salamon és Lénárd is érintik. Saját vizsgálatainkban ugyancsak értelmeztük és részletesen elemeztük a felsorolási stratégiákat (Csupó, 1982, 1983c, 1987d), ezzel a kérdéssel azonban területi problémák miatt e dolgozatban nem foglalkozunk.

A kombinatív képességet érintő elméleti és kísérleti anyagot a matematikatanítás, pontosabban a kombinatorika tanításával kapcsolatos vizsgálatok és kísérletek között is bőségesen találunk. Ezeket egészen a legutóbbi időkig a pszichológiai-pedagógiai szempontok, képességfejlesztés követelményeinek a háttérbe szorulása, az objektívált tudás, a matematika (hagyományos) felépítésének a dominanciája jellemezte. A kombinatorikát lényegében a valószínűségelmélet és a statisztika megalapozásának tekintették. Az újabb matematikatanítási koncepciók már kiemelik a kombinatorika jelentőségét, többek között azzal is, hogy a hagyományos középfokú vagy felsőoktatási tananyag megfelelően átstrukturált részei átkerültek az általános iskola első osztályaiba (ld. Varga, 1967; Türke, 1967). Nem alakult azonban még ki a matematika tanításának a képességfejlesztés követelményeit is optimálisan kielégítő módszertana. (A matematika-tanítás és képességfejlesztés kapcsolatáról bővebben ld.: Csupó, 1979. 99-114. o.) A kombinatív képességnek más tantárgyak keretében való fejlesztése pedig egyelőre még-kellően ki nem használt lehetőség. (Ezzel a lehetőséggel foglalkozunk fejlesztő kísérleteinkben.)

2. ELMÉLETI HÁTTÉR

2.1 A kombinatív képesség általános koncepciója

Elméleti koncepciónk kialakítása során a kombinatív képesség olyan meghatározásához kell eljutnunk, amely mind a kutatás, mind a pedagógiai gyakorlat számára használható, összhangban van a pedagógia és a pszichológia korábbi eredményeivel, ugyanakkor nyitott, az újabb ismeretek integrálására is alkalmas. Ez csak a kombinatív képesség fogalmának több rétegű, differenciált kimunkálásával érhető el. Ezért a kombinatív képesség fogalmát két szinten határozzuk meg. Először kialakítjuk a kombinatív képesség tágabb fogalmát, majd ezen belül határozzuk meg a vizsgálatunk tárgyát képező, szűkebb értelemben vett kombinatív képességet, a kombinatív műveleti képességet.

Ebben a részben az alapvető fogalmak bevezetésén és értelmezésén túl problémáink értelmezési keretét határoljuk körül, a 2.2 részben pedig az empirikus vizsgálatot közvetlenül előkészítő, a kombinatív műveleti képességre vonatkozó elméleti elemzéseink eredményeit összegezzük.

A legtágabban értelmezett kombinatív képességet általános képességnek, sokféle készség, jártasság, műveleti képesség bonyolult együttesének, rendszerének tekintjük. (Az általános képesség fogalmát Nagy József által bevezetett értelmében használjuk. Ld.: Nagy, 1980a, 1985, 1987.) Ennek megfelelően struktúrája kötetlen, és ugyancsak kötetlen a tevékenység tárgya, a gondolkodási folyamatok tartalma, amelyben a képesség megnyilvánul. A felépítésében részt vevő készségek, jártasságok, műveleti képességek fejlettségétől, differenciáltságától, egybeszervezettségétől függően egyénileg és minőségileg különböző, fejlettségét tekintve eltérő lehet.

A kombinatív képesség leírásához azoknak a tevékenységeknek a körülhatárolása révén juthatunk el, amelyekben az megnyilvánul.

Ebben segítségünkre lehet a köznyelv kombinatív képességgel, kombinatórikával kapcsolatos fogalmainak elemzése is. A köznyelv fogalmainak fejlettsége, differenciáltsága ugyanis egyben azt is jelzi, hogy az adott nyelvi környezetben élő egyénben "direkt" tanulás nélkül, pusztán a köznyelv elsajátítása

által milyen mértékben tudatosulnak a megfelelő gondolkodási műveletek. A köznyelvi fogalmak vizsgálata azért is hasznos lehet, mert azok közelebb állnak az ember mindennapi tevékenységéhez, a tevékenységekben kifejeződő képességekhez, mint a hosszú fejlődésen keresztülment matematikai fogalmak.

A magyar nyelv értelmező szótára a "kombináció" szó jelentését (jelentéseit) a következő módon határozza meg: "kombináció: (1) az az eljárás, amelynek során adott elemekből, számokból csoportokat alkotunk úgy, hogy közülük bizonyos számút kiválasztva, ezeket bizonyos sorrendben egymás mellé helyezzük. Ennek eredményeként létrejött csoport, elrendezés. (2) Az a cselekvés, eljárás, művelet, amelynek során két vagy több tárgyból, dologból, elemből összeállítunk, egybeszerkesztünk valamit. Ennek eredményeként létrejött egység, készítmény, alkotás. (3) A lehetőségeknek, eshetőségeknek sokoldalú, gondos számításba vétele, s az ennek alapján következetesen végrehajtott cselekvések sorozata. Lehetőségek összetevéséből, mérlegeléséből adódó terv, elképzelés, feltevés." (A magyar nyelv ... 288. o.)

Az értelmező szótár által felsorolt jelentések közül az első a kombináció matematikai fogalmának felel meg, a második és a harmadik pedig a "kombináció" szó köznyelvi jelentését írja körül. Amint a meghatározásokból is látszik, a köznyelvi jelentés a matematikait is magában foglalja, de annál sokkal tágabb. Az összeállításon, egybeszerkesztésen túl kifejezi a lehetőségek sokoldalú számításba vételét, a következetességet, a mérlegelést is.

A latin eredetű "kombináció", "kombinál" szavak nyelvünkben viszonylag elterjedtek, az átlagos műveltségű embernek legalább a passzív szókincséhez tartoznak. Így nemcsak kombinálunk, különböző kombinatív tevékenységeket végzünk, hanem tudunk is arról, hogy léteznek ilyen tevékenységek. A tevékenység szabályaival, szerkezetével kapcsolatos ismeretek azonban már nem rögzítődtek a köznyelvben. A kombinatorika többi alapfogalma alig fordul elő, csupán a "variáció", "variál" fogalmak tartoznak a köznyelvhez. A "variáció" egyszerűen a "változat" jelentéssel, míg a "variál" a "lényeg megtartásával más alakban, más elrendezésben (többször) ismételi valamit" (A magyar nyelv ... 245. o.) értelemben tulajdonképpen a "kombinál" szinonímája. A köznyelvben tehát a kombinatív tevékenység fogalma nem differenciálódik.

A hétköznapi életben kombinatívnak nevezett tevékenységek során csak ritkábban van szükség arra, hogy a lehetséges összeállítások sokféleségét valóban létre is hozzuk. Erre példa lehet a divattervező munkája, akinek a rendelkezésre álló anyagok sokféle összeállítását valóban meg kell alkotnia. Hasonlóképpen a zeneszerző is egy adott zenei motívum sokféle variációját hozza létre, rögzíti művében maradandóan. Más esetekben kombinatívnak nevezzük a tevékenységet, vagy még inkább a cselekvő személyt akkor is, ha a tevékenység célja az adott esetben nem a sokféleség produkálása, hanem egy adott optimális eset megtalálása, kiválasztása. Így a kombinatív sakkjátékos sem lépi meg az összes szóbajozható lépést, feltehetjük azonban, hogy amit lép, azt sok végig-

gondolt alternatíva közül választotta ki. Egy építész vagy ipari formatervező kombinativitásának a végső produktuma a legszemléletesebb bizonyítéka, azonban azt, hogy itt is sokféle lehetőség közüli választásról van szó, legfeljebb csak a terv kidolgozása során papírkosárba dobott variációk sokaságának elemzésével lehetne kimutatni. A köznyelvnek ez a szóhasználata viszont jelezheti azt is, hogy a kombinativitás nem mindig manifesztálódik a megfigyelhető tevékenységekben, a gondolkodás megfelelő műveletei többnyire a háttérben maradnak.

A "kombináció", "kombinál" szavak köznyelvi jelentéséből kiindulva tehát a "kombinálás"-t mint tevékenységet az "összeállítás, egybeszerkesztés, összekapcsolás, csoportosítás, lehetőségek számításba vétele, mérlegelése, megvalósítása" tevékenységek körében kereshetjük. A matematikai értelmezést alapul véve a kiválasztást, rendezést, adott feltételeknek eleget tevő sokféle konstrukció előállítását kell még az előbb felsoroltakhoz hozzávennünk.

Ezeknek a fontosabb vonásoknak a figyelembe vételével a kombinatív képesség legáltalánosabb fogalmát a következőképpen határozhatjuk meg:

Tágabb értelemben kombinatív képességen azt a pszichikus szabályozási rendszert értjük, amelynek révén az ember változatos módon képes dolgok vagy események tetszőleges összességéből tetszőleges szabályok szerint bizonyos számút kiválasztani és/vagy létrehozni ezek egymástól különböző összeállításait, amelyek valamilyen körülírt feltételeknek megfelelnek.

Ilyen általános, határozatlan feltételek mellett, amikor a kombinálandó dolgok összessége is, az összeállítás szabályai is és a létrehozandó összeállítások leírása is csak nagyon lazán körülhatárolt, nem alakulnak ki állandósult struktúrák, elemi műveletek láncolatából álló szabályozási rendszerek. E bonyolult egészt, működését, megnyilvánulásait éppen a struktúra kötetlensége, állandósult kapcsolatrendszerek hiánya miatt nem írhatjuk le a maga teljességében.

Vannak azonban a kombinatív képességnek olyan részei, amelyek struktúrája kötött. Ezeknek a struktúráknak a számbavétele, leírása elvileg már lehetséges. Ezek a kötött, állandósult struktúrák akkor jöhetnek létre, ha a képesség határozottabb feltételek között működik, vagyis a kiinduló szituáció, a feladathelyzet egyértelműen megszabja, hogy mennyi és milyen konstrukció állítható elő. A feltételek meghatározottságának három lényeges momentuma van:

1. Adottak a kiinduló elemek, amelyekből az összehasonlításokat létre lehet hozni.

2. Meg van határozva, hogy az elemeket milyen feltételek mellett lehet az összeállításokban felhasználni.

3. Egyértelműen adott, hogy milyen feltételeknek megfelelő összeállításokat kell létrehozni.

E gondolatmenettel, az előző három feltétel konkretizálásával eljutottunk a szűkebb értelemben vett kombinatív képesség fogalmához.

Kombinatív műveleti képességnek azt az állandósult pszichikus szabályozási rendszert nevezzük, amelynek működése révén az ember képes dolgok vagy események megadott összességéből meghatározott feltételek szerint bizonyos számút kiválasztani, és létrehozni ezek összes különböző, megadott feltételeket kielégítő összeállítását.

Minden egyes konkrét feltételrendszernek megfeleltethetünk egy vagy több műveleti struktúrát (felsorolási algoritmust). Feltételrendszeren a feladathelyzet vagy problémaszituáció meghatározó vonásainak összességét (a felhasználható elemek halmaza, az elemek felhasználhatóságára vonatkozó feltételek, az elkészítendő összeállítások leírása), **műveleti struktúrán** pedig az elemi műveletek olyan egymásutánját értjük, amely az összes lehetséges összeállítás felsorolásához elvezet.

Feltételezésünk szerint a kombinatív műveleti képesség sok gyakorlati tevékenység elvégzésében szerepet játszik. E képesség műveletrendszere alkotja azoknak a gondolkodási folyamatoknak az alapvető mechanizmusát is, amelyek a tágabb értelemben vett kombinativitásban szerepet játszanak.

Az így jellemzett kötött feltételek mellett tehát a tevékenységek szerkezetének általánosítódása révén kialakulhat az elemi operációk olyan sorozata, amelynek működése az összes lehetséges összeállítás elkészítését és felsorolását eredményezi. Ha ez a művelet sor nem túl hosszú és nem túl bonyolult, valamint ha elegendően sok különböző tartalom végeztük el, akkor a műveleti struktúrák interiorizálódnak, a megfelelő tevékenységet szabályozó állandósult pszichikus rendszer alakul ki. Ezeket a pszichikus rendszereket nevezzük **kombinatív műveleteknek**.

A részek felől kiindulva tehát a szűkebb értelemben vett kombinatív képességet úgy is meghatározhatjuk, mint a kombinatív műveletek rendszerét, mint **műveleti képességet**.

A műveleti képesség fogalmának pontos meghatározására itt nem térünk ki (ld.: Nagy, 1985a. 32. o.). Értelmét legkönnyebben a készségek és az általános képességek fogalmával összevetve világíthatjuk meg. A készségek tevékenységeink automatizált komponensei. Mindig valamilyen konkrét tartalomhoz kötődnek (pl.: az írás készsége, az olvasás készsége, igeragozás stb.), ezzel szemben a műveleti képességek sokféle szituációban, sokféle tartalomnál működőképesek (pl.: kombinálhatunk tárgyakat, jeleket, szavakat stb.). Megegyeznek viszont a készségek és a műveleti képességek abban, hogy struktúrájuk, vagyis a bennük megjelenő elemi operációk sorrendje kötött. A műveleti képességek és az általános képességek közös vonása pedig az, hogy nem kötődnek egy konkrét tárgyhöz, többféle tartalmú tevékenység szabályozásában részt vehetnek, de különbözőek abban, hogy a műveleti képességek elemi operációk

kötött sorrendű láncolatából állnak, ellentétben a kötetlen struktúrájú általános képességekkel.

A kombinatív művelet fogalmához még annyi megjegyzést fűzünk, hogy itt a művelet fogalmát természetesen nem matematikai, hanem pszichológiai értelemben használjuk. Piaget megfogalmazása szerint: "Kibernetikai nézőpontból egy művelet egy tökéletes reguláció. Ez azt jelenti, hogy egy műveleti rendszer (operational system) kiküszöböli a hibákat, mielőtt azok fellépnének..." (Piaget, 1971. 15. o.). A kombinatív műveletek tehát olyan pszichikus rendszerek, amelyek a megfelelő tevékenységet (adott elemek, adott feltételeket kielégítő összeállításainak felsorolása) szabályozzák.

A pontosság és egyértelműség érdekében érdemes néhány további terminus értelmezésében is megállapodnunk. A továbbiakban mindazokat a dolgokat, legyenek azok konkrét tárgyak, dolgok jelei vagy absztrakt szimbólumok, amelyeket a műveletvégzés során fel lehet használni, kiinduló elemeknek fogjuk nevezni (pl.: A, B, C). Szinonim értékű kifejezések: felhasználható elemek; vagy egyszerűen csak: elemek. Az elkészítendő összeállításokat (variációkat, permutációkat, kombinációkat) pedig, bármilyen kiinduló elemekből épülnek fel, konstrukcióknak nevezzük. A konstrukciók meghatározott sorozata egy felsorolás. Beszélhetünk még a felsorolás sorrendjéről. A felsorolás sorrendje a művelet működésének a "lenyomata", minden egyes felsorolási sorrend mögött valamilyen gondolkodási stratégiát, esetünkben műveletvégzési stratégiát tételezhetünk fel.

A "kombináció" és a megegyező tövű szavakból többféleképpen lehet melléknevet képezni. Ez módot ad arra, hogy az objektiválódott tudással és a pszichikus rendszerekkel kapcsolatos kifejezéseket is megkülönböztessük. Ezért a továbbiakban a kombinációs, kombinatorikus, kombinatorikai kifejezéseket az objektivált tudással, matematikai ismeretekkel összefüggésben fogjuk használni (pl.: kombinatorikai műveletek), a kombinatív melléknevet pedig a gondolkodással, a pszichikus rendszerekkel kapcsolatban (pl.: kombinatív műveletek).

2.2 A kombinatív műveletek hipotetikus rendszere

Ha általában, vizsgálatunk "filozófiai" kereteként el is fogadjuk Piaget-nak a gondolkodási és matematikai alapstruktúrák megegyezésére vonatkozó – egyébként nagyon is plauzibilis – hipotézisét, ez még nem jelenti azt, hogy a kombinatív műveleteket mint pszichikus struktúrákat, ezek rendszerét matematikai úton le lehetne vezetni. A matematika mint objektiválódott tudás és a köznapi gondolkodás, illetve e gondolkodás háttérében álló pszichikus rendszerek ugyanis, bár eredetüket és így legáltalánosabb alapjaikat tekintve is

egyaránt a valóság objektív struktúráiban gyökereznek, eltérő fejlődési utat járnak be.

A matematika saját építményét a valóság fogalmaiból kiindulva, azokat explicálva, a mindennapok gondolkodásának korlátaitól megszabadulva több lépcsős absztrakcióval alkotja meg. Fejlődésének legjellegzetesebb mozzanata a folytonos átstrukturálódás. Közismert az is, hogy egy matematikai diszciplína többféle módon is felépíthető, ami az egyik rendszerben axióma, az a másikban tétel. Így tehát annak feltárása, hogy egy adott diszciplínának melyek is a legáltalánosabb struktúrái, rendkívül mély matematikai elemzést igényel (ld. a Bourbaki-csoport munkáit a Piaget által hivatkozott struktúrákkal kapcsolatban).

A kombinatorika esetében bonyolítja a helyzetet az is, hogy gyorsan fejlődő tudományág, ezért ismereteinek nagy része az utóbbi fél évszázad terméke, és nem kristályosodott még ki egyértelmű, világos szerkezete, alapelemeinek rendszere. Gondjainkat azonban az sem oldaná meg, ha létezne egy egységes, áttekinthető rendszer, mint ahogy azt jellemzően mutatja a matematikai logika műveleteinek példája. A 16 kétváltozós kijelentéslógikai művelet ugyanis egy pontosan számba vehető, teljes rendszert alkot (ld. az 1. táblázatot). Rövid elemzés után azonban kiderül, hogy közülük csak 10 a "valódi" kétváltozós, ezek közül is csak néhányat használunk, de végső soron, matematikai szempontból kettő is elég, mivel ezekkel az összes többi kifejezhető. Tehát az, hogy milyen logikai műveletek épülnek be a gondolkodásunkba, vagyis melyek a logikai műveletek mint pszichikus struktúrák, még egy ilyen jól meghatározott rendszer mellett is tapasztalati kérdés marad. Ugyanakkor tesztjeink kidolgozásához mégis csak szükség van valamilyen kiinduló rendszerre.

A fenti elvi nehézségeket előre bocsátva a kombinatív műveletek vizsgálatának stratégiáját a következőképpen foglalhatjuk össze. Kiindulásként a matematika és a pszichológia eredményeire támaszkodva felvázoljuk a kombinatív műveletek legvalószínűbb rendszerét. E rendszert kezdeti hipotézisnek tekintve kidolgozzuk a megfelelő teszteket, majd az empirikus vizsgálatok eredményei alapján értékeljük a hipotetikus rendszert. Természetesen bonyolult jelenségről lévén szó az értékelés nem a globális elfogadás vagy elvetés alternatívája közötti választást jelenti, hanem sokkal inkább a hipotetikus rendszer egyes elemeit megerősítő vagy kétségessé tevő eredmények felsorakoztatását és mérlegelését, valamint (esetleges további vizsgálatok alapjául is szolgáló) újabb, módosított, a valósággal várhatóan nagyobb összhangban levő hipotézis megalkotását.

Meg kell jegyeznünk, hogy a következőkben felvázolandó hipotetikus rendszer nem az első változat, hanem már egy "fejlődési folyamat" eredménye, és már tükrözi a tesztek első kipróbálása során szerzett tapasztalatainkat is. A kutatás természete szerint nem is az utolsó, hanem azt az állapotot merevíti ki,

melynek alapján a feladatokat illetve teszteket a jelenlegi formájukban összeállítottuk.

Ezek után sort kell kerítenünk azoknak a struktúráknak a számbavételére és rendszerezésére, amelyek körében a kombinatív műveleteket keresnünk kell.

A kombinatorika mint objektivált tudás szerkezetének és alapjainak elemzésekor a diszciplína összefoglaló monográfiáiból, egyetemi, főiskolai és egyéb tankönyveiből indultunk ki (Bácskai, 1971. 132-146. o.; Czapáry és mtsi, 1974. 203-245. o.; Denkinger, 1968; Fuchs, 1963. 138-171. o.; Gáspár, 1968. 65-88. o.; Gyapjas, 1972; Lovász – Vesztergombi – Pelikán, 1970; Kemény – Snell – Thomson, 1971; Ryser, 1963; Szele, 1970. 55-87. o.; Szendrei, 1974; Tomescu, 1978; Varga, 1967; Vilenkin, 1971). Az elemzés során azt vettük figyelembe, hogy az egyes könyvek milyen alapfogalmakat vezetnek be, hogyan definiálják további fogalmaikat, mi a tételek egymásból való levezetésének rendje és általában az egész ismeretrendszer belső felépítése, elrendezése. A pszichológiai szempontokat az általános pszichológiai törvényszerűségek (pl. a rövid távú memória kapacitása) és a korábban már hivatkozott elméleti megfontolások és empirikus vizsgálatok eredményeinek felhasználásával érvényesítettük. Az elemzés részleteit itt nem imertetjük, csak a fő gondolatmenetet, illetve a tesztek előzetes kipróbálása során felmerült újabb szempontokat mutatjuk be. (A részletes elemzést ld.: Csapó, 1979.)

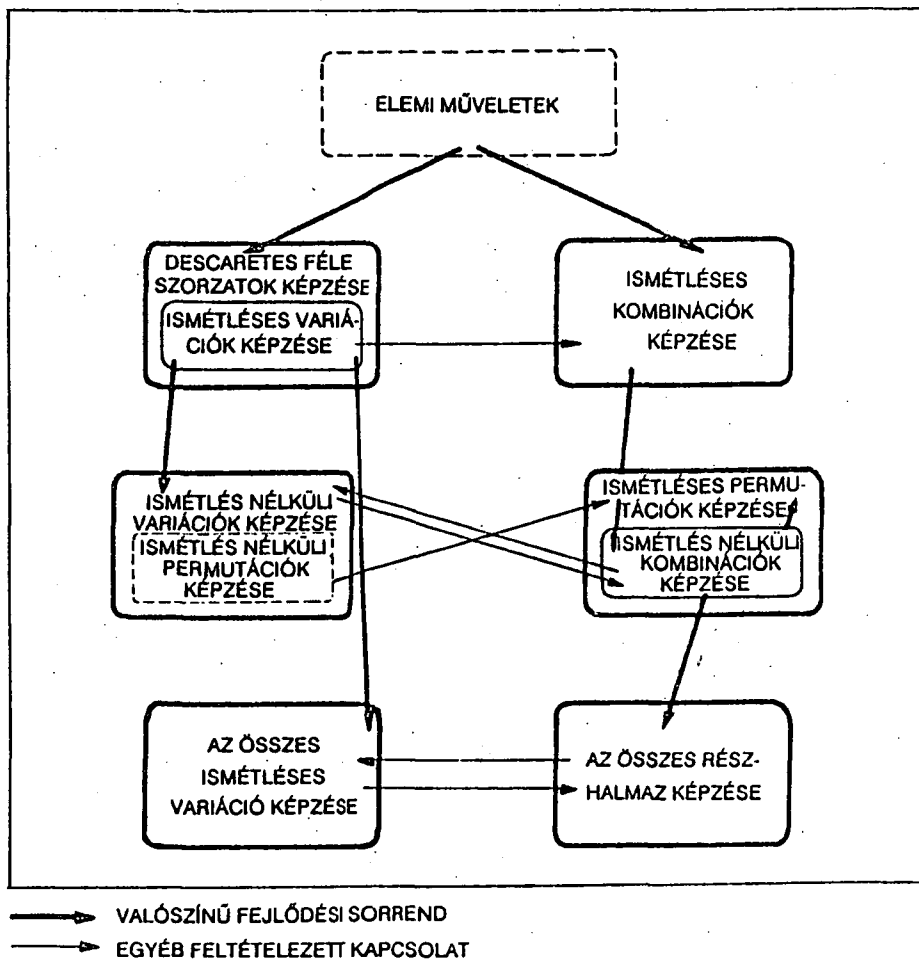
A kombinatorika elemzése, pszichológiai szempontok és az elővizsgálatok tapasztalatai alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy a kombinatív műveleti képességet kiindulásként egy nyolc műveletből álló rendszerrel modellezhetjük. Feltételezzük, hogy a pszichikumot e nyolc műveletre készített megfelelő feladatokkal szembesítve a kombinatív képesség minden fontosabb megnyilvánulását felmérhetjük.

Feltételezésünk szerint az elemi műveletek kombinatív műveletekké szerveződése két irányban indul meg. E két irányban és ezek kölcsönhatásaként a műveletek differenciálódásával és integrálódásával fejlődik ki a kombinatív műveleti képesség. Szerkezetét, kiépülésének feltételezett folyamatát az 1. ábra alapján tekinthetjük át.

Egyik oldalon megjelenik a legáltalánosabb kombinatorikai struktúra, a Descartes-féle szorzatok képzése. E műveletet a matematikában nem szokás a kombinatorika keretei között tárgyalni, holott a kombinatorikában tárgyalt műveletekhez hasonlóan halmazok elemeiből képez konstrukciókat az összes lehetséges módon, mégpedig (két halmaz esetében) úgy, hogy az egyik halmaz minden elemét összepárosítja egy másik halmaz minden elemével.

A Descartes-féle szorzatok képzésének differenciálódásával alakul ki az ismétléses variációk képzése, ami matematikai szempontból az előző speciális eseteként is felfogható: egy halmaznak önmagával képzett szorzataként.

Az előző műveleti séma továbbfejlődésével, az azonos elemeket nem tartalmazó és az azonos elemeket is tartalmazó konstrukciók megkülönböztetésével és az utóbbiak kizárásával alakul ki az ismétlés nélküli variációk képzésének művelete. E művelet speciális esete az ismétlés nélküli permutációk képzése, melyet nem is fogunk különböző műveletként kezelni. Az ismétlés nélküli permutációk képzésének ugyanis önmagában nem alakulhat ki megfelelő számú számértékben különböző változata, és így valószínűleg nem is differenciálódik a variációk és a permutációk képzése.



1. ábra
A kombinatorikus műveletek hipotetikus rendszere

Végezetül még ebben a csoportban tartjuk számon az n elemből az összes, legfeljebb k hosszúságú ismétléses variáció képzését. (Feltéve, hogy ez egyáltalán kialakul.) E műveletet azért is vettük fel a rendszerbe, hogy mód legyen a különböző számú elemből álló konstrukciókat előállító műveletek vizsgálatára is.

A fejlődés másik ágát az ismétléses kombinációk képzésének megjelenése indítja. Az elővizsgálatok eredményei ezen a ponton vezettek korábbi elgondolásaink legradikálisabb átalakításához. A matematikai rendszer elemzése ugyanis azt sugallta, hogy az ismétléses kombinációk képzése túlságosan bonyolult. A művelettel kapcsolatos formulákat ugyanis az ismétlés nélküli kombinációk képzéséből szokás levezetni, azt a benyomást keltve ezáltal, hogy itt egy összetettebb tevékenységről van szó. Ugyanebbe a csapdába esik az alsó tagozatos új matematika is, a többi műveleteknél sokkal később tanítva az ismétléses kombinációk képzését. A helyzet ezzel szemben az, hogy az ismétléses kombinációk képzése az egyszerűbb, abban az értelemben, hogy a k.sz.-ek könnyebben megoldják, mint az ismétlés nélküli kombinációk képzését. Piaget-nél is ezt láttuk: fiatalabb k. sz.-eknél megengedte az ismétlődést, csak az idősebbeknél követelte meg a szigorú különbségtételt (Piaget–Inhelder, 1951).

Az ismétléses kombinációk képzésének helyével kapcsolatos gondolatmenet elvezetett egy általánosabb alapelv megfogalmazásához is: azt a műveletet tekintettük egyszerűbbnek, amelyhez tartozó feladatokat kevesebb korlátozó, bizonyos konstrukciók előállítását kizáró feltétel megfogalmazásával lehet kitűzni. Két művelet összehasonlításakor tehát (egyébként azonos számszerű jellemzők mellett) az a művelet az egyszerűbb, amelyik több konstrukció képzését engedi meg. E logika szerint a variációk egyszerűbbek a kombinációknál, mivel nem kell kikötni, hogy "a sorrend nem számít". Ugyancsak egyszerűbb az ismétléses variációk képzése az ismétlés nélküli variációk képzésénél, amint az az előbb már egy másik gondolatmenetből is kiadódott.

Az ismétléses kombinációk képzéséből származtathatjuk tehát az ismétlés nélküli kombinációk képzését, ez utóbbi általánosításaként pedig az ismétléses permutációk képzését. Az ismétlés nélküli kombinációkban és az ismétléses permutációkban az a közös, hogy egyaránt halmazok partícióinak tekinthetők. Bár az ismétléses permutációknak a másik csoporthoz való közelítése mellett szólhat az az érv, hogy a permutációk esetében az elemek konstrukción belüli sorrendjének is van jelentősége, míg a kombinációknál nincs. Egyelőre azonban a strukturális szempontot erősebbnek tartva az ismétléses permutációkat a kombinációk ágán szerepeltetjük, az empirikus vizsgálatra bízva a kérdés eldöntését.

Végül ugyancsak a kombinációképzés mechanizmusaiból, az összes különböző elemszámú ismétlés nélküli kombináció képzéseként származtatjuk a halmazok összes részhalmazának képzését is.

E nyolc művelet kiemelését nem csupán a matematikai elemzés eredményei indokolják, de azt tapasztaljuk, hogy az ilyen típusú struktúrák nagyon sok hétköznapi tevékenységben, gondolkodási folyamatban is benne vannak, így kialakulásuk már csak ezért is feltételezhető.

Az ábrán bejelöltük a valószínűnek tartott fejlődési sorrendet, továbbá egyéb feltételezhető kapcsolatokat is. E kapcsolatok szerkezeti természetűek, többnyire a matematikai származtatás egy lehetséges módját jelzik.

Az ábra két oldalán elkülönített műveletek között laza kapcsolatot tételezhetünk fel azon közös vonás alapján is, hogy a bal oldali műveletek által képezhető konstrukciók fa alakú gráfok mentén sorolhatók fel, míg a jobb oldalon álló műveletek esetében ehhez hálókra van szükség.

Természetesen nem állíthatjuk azt, hogy a bemutatott modell tartalmazza a kombinatív műveletek összes lehetséges változatát. Elméleti elemzéseinkben korábban több művelettel és többféle strukturálási lehetőséggel foglalkoztunk (pl. ciklikus permutációk, különböző szimmetriák, ld. Csapó, 1979), az empirikus vizsgálatokban is szerepelt néhány további művelet. Az együttesen kezelhető adathalmaz méreteit azonban technikai szempontok is korlátozzák. Ezért a fő vizsgálat modelljében csak a kombinatív műveletek rendszerének középponti magját tartottuk meg. A modell részletekkel gazdagított változatának empirikus tesztelését különböző, később elvégzendő mérésekkel, illetve elemzésekkel kívánjuk megoldani.

Ismételten hangsúlyoznunk kell azt is, hogy az itt bemutatott struktúrát még ebben a már több korrekción átesett változatban is csupán hipotézisnek tekinthetjük, melynek lehetnek alternatívái és amelyet a későbbi vizsgálatok folyamatosan módosíthatnak, továbbfejleszthetnek.

3. A VIZSGÁLAT ESZKÖZEI

3.1 A tesztrendszer kidolgozásának alapelvei

A kombinatív műveletek hipotetikus rendszerének felvázolása során 8 alapvető művelettípust találtunk (ld.: 1. ábra). Ezekből kiindulva készítettük el a tesztek feladatstruktúráját. Mind a 8 művelettípushoz egy 3-6, számértékekben különböző feladatból álló szubtesztet állítottunk össze. A feladatokat három számértékkel jellemezhetjük: (1) a kiinduló elemek száma, (2) a létrehozandó konstrukciók hossza (az, hogy hány elem szerepelhet egy konstrukcióban) és (3) az összes lehetséges konstrukció száma. Ezeket az értékeket változtattuk az adott lehetőségeken belül.

Mindenütt szerepel a lehető legkevesebb kiinduló elemből a legrövidebb konstrukciót előállító feladat, majd mindkét értéket növelve a következő legegyszerűbb feladatok. Alapelv volt az is, hogy 25-nél ne legyen több a lehetséges konstrukciók száma. Így a szubtesztbe majdnem az összes számításba vehető feladat bekerült, többnyire csak 1-1 maradt ki. Nagyobb bőségben feladatokat csak a Descartes-féle szorzatok, illetve az ismétléses kombinációk közül válogathattunk. Itt arra törekedtünk, hogy a tesztbe bekerülő feladatokkal a lehető legtöbb összehasonlítást elvégezhessük, illetve a feladatok egyenletesen lefedjék a rendelkezésre álló intervallumot. (Az alkalmas feladatok számbavételét ld.: Csapó, 1979, 83-85.o.)

Az említett szempontokat és részben az előzetes kipróbálás tapasztalatait figyelembe véve végül arra a megállapításra jutottunk, hogy a nyolc művelet vizsgálatához 37 feladatstruktúra használata a legkedvezőbb. A "feladatstruktúra" kifejezés használatával azt kívánjuk hangsúlyozni, hogy itt nem feladatokról, hanem azoknak még csak a matematikai szerkezetéről, numerikus jellemzőiről van szó. Ezeket a legkülönbözőbb konkrét tartalmak felhasználásával fogalmazhatjuk feladatokká.

Az így előálló 37 feladatstruktúrát, amely tehát 8 szubtesztet alkot, két tesztre (tesztstruktúrára) osztottuk, mindegyikbe négy szubtesztet soroltunk. A tesztek feladatstruktúráit és azok jellemzőit a 2. és a 3. táblázatban foglaltuk

2. táblázat. A "VARIÁLÁS" tesztek feladatainak szerkezete

Feladat neve	jele	Kiinduló elemek száma	jele	hosz-sza	szá-ma	A konstrukciók felsorolása
Descartes-féle szorzatok képzése	a	2+2	A, B, 1, 2	2	4	A1, A2, B1, B2
	b	3+2	A, B, C, 1, 2	2	6	A1, A2, B1, B2, C1, C2,
	c	4+3	A, B, C, D, 1, 2, 3	2	12	A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D1, D2, D3
	d	2+2+2	A, B, +, -, 1, 2	3	8	A+1, A+2, A-1, A-2, B+1, B+2, B-1, B-2
	e	6+2	A, B, C, D, E, F 1, 2	2	12	A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1, D2, E1, E2, F1, F2
	f	2+2+ +2+2	A, B, +, -, 1, 2, X, Y	4	16	A+1X, A+1Y, A+2X, A+2Y, A-1X, A-1Y, A-2X, A-2Y, B+1X, B+1Y, B+2X, A+2Y, B-1X, B-1Y, B-2X, B-2Y
Ismétléses variációk képzése	a	2	A, B	2	4	AA, AB, BA, BB
	b	2	A, B	3	8	AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB
	c	3	A, B, C	2	9	AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC
	d	4	A, B, C, D	2	16	AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD
	e	2	A, B	4	16	AAAA, AAAB, AABA, AABB, ABAA, ABAB, ABBA, AB BB, BAAA, BAAB, BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBBA, BBBB
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	3	A, B, C	2	6	AB, AC, BA, BC, CA, CB
	b	3	A, B, C	3	6	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
	c	4	A, B, C, D	2	12	AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC
	d	5	A, B, C, D, E	2	20	AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED
Az összes ismétléses variáció képzése	a	2	A, B	1, 2	6	A, B, C, AA, AB, BA, BB
	b	3	A, B, C	1, 2	12	A, B, C, AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC
	c	2	A, B	1, 2 3	14	A, B, AA, AB, BA, BB, AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB
	d	4	A, B, C, D	1, 2	20	A, B, C, D, AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD

3. táblázat. A "KOMBINÁLÁS" tesztek feladatainak szerkezete

Feladat neve	Kiinduló elemek		hossz-sza	szá-ma	A konstrukciók felsorolása	
	jele	száma				
Ismétléses kombinációk képzése	a	2	A, B	2	3	AA, AB, BB
	b	2	A, B	3	4	AAA, AAB, ABB, BBB
	c	2	A, B	4	5	AAAA, AAAB, AABB, ABBB, BBBB
	d	3	A, B, C	2	6	AA, AB, AC, BB, BC, CC
	e	3	A, B, C	3	10	AAA, AAB, AAC, ABB, ABC, ACC, BBB, BBC, BCC, CCC
	f	4	A, B, C, D	2	10	AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	3	A, B, C	2	3	AB, AC, BC
	b	4	A, B, C, D	2	6	AB, AC, AD, BC, BD, CD,
	c	5	A, B, C, D, E	2	10	AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE
	d	5	A, B, C, D, E	3	10	ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE
	e	6	A, B, C, D, E, F	4	15	ABCD, ABCE, ABCF, ABDE, ABDF, ABEF, ACDE, ACDF, ACEF, ADEF, BCDE, BCDF, BCEF, BDEF, CDEF
Ismétléses permutációk képzése	a	3	A, B, B	3	3	ABB, BAB, BBA
	b	4	A, A, B, B	4	6	AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA
	c	4	A, A, B, C	4	12	AABC, AACB, ABAC, ACAB, ABCA, ACBA, BAAC, CAAB, BACA, CABA, BCAA, CBAA
	d	5	A, A, B, B, B	5	10	AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB, BABAB, BABBA, BBAAB, BBABA, BBBAA
Az összes részhalmaz képzése	a	2	A, B	1, 2	3	A, B, AB
	b	3	A, B, C	1, 2 3	7	A, B, C, AB, AC, BC, ABC
	c	4	A, B, C, D	1, 2 3, 4	15	A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD

össze. A feladatok kétfelé bontásának kizárólag gyakorlati okai vannak: egy tesztbe egy alkalommal (kb. egy óra alatt) megoldható mennyiségű feladatot kívántunk felvenni, és ehhez a 37 túl sok lett volna. Mivel a 37 feladat eredményei általában nem férnek el egyoldalas táblázatokban, a két tesztre bontást az eredmények bemutatásakor is megtartjuk. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy ezek a praktikus szempontok az adatfeldolgozást nem érintik, mindenütt, ahol ennek érdemi jelentősége van, a 37 feladatot együtt kezeljük.

A "VARIÁLÁS" névvel jelölt tesztbe kerültek a Descartes-féle szorzatok képzésének, az ismétléses és az ismétlés nélküli variációk képzésének, valamint az összes ismétléses variáció képzésének műveletei, tehát azok a műveletek, amelyek által képzett konstrukcióknál az elemek sorrendje is számít. A "KOMBINÁLÁS" nevű tesztbe az ismétléses és az ismétlés nélküli kombinációk képzésének, az ismétléses permutációk képzésének és az összes részhalmaz képzésének műveleteit soroltuk. Ebben a csoportban az ismétléses permutációk kivételével nem számít a konstrukciókon belül az elemek sorrendje.

Bár a két teszt elnevezése emlékeztet a besorolt műveletek jellegére, azokat pusztán azonosítónál nem tekintjük többnek. Azon túl, hogy az elméleti elemzés eredményeként kapott 37 feladatstruktúra alkalmas a kombinatív műveletek rendszerének vizsgálatára, több korlátozó előzetes feltételezést nem fogunk használni, a feladatok összefüggéseit, a műveleti képesség belső struktúráját empirikus kérdésként kezeljük.

A mérőeszközök kidolgozásának következő lépéseként a számba vett feladatstruktúrákhoz konkrét feladatokat kell rendelnünk, vagyis olyan tevékenységeket, amelyek a megfelelő struktúrával rendelkeznek. Itt azonban újabb kérdésként merül fel, hogy a sokféle azonos struktúrájú tevékenység közül melyiket válasszuk tesztjeinkhez? Újabb szempontként foglalkoznunk kell tehát a tevékenység tárgyával (Leontyev, 1979).

A műveleti képességek értelmezése szerint azok különböző tevékenységekben működhetnek, tehát a megfelelő tevékenység tárgya kötetlen (Nagy, 1980a, 1987). Megnyilvánulásuk alapján véve nem attól függ, hogy mik azok a konkrét elemek, amelyekből – például a kombinatív képesség esetében – konstrukciókat kell képezni. E hipotézis szerint tehát a művelet működésének eredményessége szempontjából mindegy, hogy a precízen meghatározott struktúrájú tevékenységet milyen tárggyal végezzük. Vizsgálatunk során e hipotézis érvényességi körét is elemzés tárgyává kívánjuk tenni, ezért szükség lesz olyan feladatokra, amelyek struktúrája megegyezik, de tárgya különböző. Elméletileg tökéletes megoldáshoz akkor jutnánk, ha képesek lennénk az összes szóba jövő tartalommal méréseket végezni. Mivel azonban ez lehetetlen, meg kell elégednünk néhány jól megválasztott különböző tárgyú tevékenység tanulmányozásával. Kellő változatossághoz juthatunk akkor, ha különböző absztrakciós szintű tevékenységet választunk.

A kombinatív művelési képesség mérőeszközeit három különböző tartalommal dolgoztuk ki úgy, hogy az előzőekben bemutatott feladatstruktúrák mindegyikéhez háromféle feladatot készítettünk. A háromféle feladat tartalma az absztrakció különböző fokán áll. A manipulatív feladatokban a tanulók magukkal a tárgyakkal tevékenykednek, a képi feladatokban a dolgok stilizált képmásain jelzik megoldásaikat, míg a formális feladatokban már csak absztrakt jeleket használnak. Az egyes tartalmak megnevezésében korábbi publikációinkban (Csapó, 1981, 1983a, 1983b, 1985a, 1985c; Nagy, 1981) a művelési képességek kutatásával foglalkozó team által még a munkahipotézisek megfogalmazásának fázisában kialakított terminológiához tartottuk magunkat. (Annak megfelelően a képi tartalmat mindenütt *szenzorosnak*, a *formális*at a kezdeti időszakban *verbálisnak* neveztük.) A mérőeszközök kidolgozása, kipróbálása, az angol terminológiával való összhang igénye és nem utolsósorban az írásnak kapcsán kialakult vita a terminológiai kérdések alaposabb átgondolását tette szükségessé. Ezáltal jutottunk el a jelenleg használatos megnevezések-hez.

Az absztrakciós szintek problémájával, általános jellemzésükkel itt nem foglalkozunk, Nagy József könyve (1987. 50-54. o.) részletesen tárgyalja azokat. Mindössze azokra a mozzanatokra térünk ki, amelyek pontos és egyértelmű megfogalmazása eredményeink interpretálásához elengedhetetlenül szükséges. Mindenekelőtt azt kell hangsúlyoznunk, hogy a feladatok tartalmának absztrakciós szintje nem azonos a kognitív szinttel. Kiindulásként nem tételezzük fel, hogy a feladat tartalmának absztrakciós szintje determinálja azt, hogy a feladat a tanulók tudatában milyen absztrakciós szinten képződik le. Nyitott kérdésként kezeljük a tartalomnak a teljesítményekre gyakorolt hatását is, és külön is vizsgálat tárgyává tesszük azt, hogy vajon a teljesítményeket a művelési struktúra determinálja-e erősebben (ahogy azt a művelési képesség koncepciója alapján várhatjuk), vagy a tartalomnak van erősebb befolyása. A formális absztrakciós szinttel kapcsolatban ismételtén megjegyezzük, hogy itt a megnevezés csak a feladatok formalizált tartalmára utal, és ez nem áll semmilyen közvetlen kapcsolatban a Piaget által a gondolkodás fejlődésének utolsó fázisaként tekintett formális stádiummal, a formális művelési gondolkodással.

A továbbiakban a *tevékenység tárgya* terminust a Leontyev (1979) által kifejtett általánosabb értelemben használjuk. A vizsgálati eszközökkel kapcsolatban inkább a *feladatok tartalmáról* fogunk beszélni. A "tartalom" terminusban a feladatok összes nem strukturális jellemzőjét foglaljuk össze. Így beszélhetünk *manipulatív*, *képi*, *formális* tartalmú feladatokról, többé-kevésbé "zajos" tartalmú, azaz felesleges, zavaró információkat tartalmazó feladatokról stb. A műveletek identifikálására szolgáló *struktúra*, valamint a vizsgálat szempontjából lényegtelen, esetleges tartalom kölcsönhatásának, szerepének elemzésével a 8.3 pontban foglalkozunk. (Ld. még a validitás kérdéseit, 3.4 pont.)

A három szint feladatait úgy készítettük el, hogy a struktúrájuk megegyezzen, vagyis a 2. - 3. táblázatok mindhárom tartalom feladatainak közös struktúráját tartalmazzák. Így egy olyan feladatrendszert kaptunk, ami $3 \times 37 = 111$ feladatot tartalmaz három egymásnak pontosan megfeleltethető struktúrában.

A kombinatív képesség vizsgálatára szolgáló minden egyes feladat megadott feltételeknek eleget tevő konstrukciók elkészítését és az összes lehetséges konstrukció felsorolását kérte. A feladatok a kiinduló (felhasználható) elemek halmazát, az elemek felhasználásának korlátait és az elkészítendő konstrukciók tulajdonságait írták körül.

3.2 A manipulatív feladatok

A manipulatív feladatok megoldása során a tanulók kis színes lapokkal, illetve számoló pálcikákkal dolgoztak, ezekből az eszközökből készítették el a megfelelő konstrukciókat. A kiadott eszközök több elemet tartalmaztak, mint amennyire az összes különböző konstrukció elkészítéséhez szükség volt. Fontosnak tartottuk, hogy a k.sz.-ek az elemek számából ne következtethessenek arra, hogy mennyi konstrukciót kell létrehozni.

A feladatokat nyomtatott feladatlapokon adtuk ki, mely a feladat szövegén kívül az elkészítendő konstrukciók rajzát is tartalmazta. A feladatokat a 2.2 részben bemutatott struktúra szerint két tesztbe rendeztük el, ezeken belül az egy művelethez tartozó feladatokat külön szubtesztbe csoportosítottuk. Minden szubteszt rövid szöveggel kezdődik, melyben részletesebben kifejtjük a feladatok közös vonásait. Így az egyes feladatokhoz már csak rövidebb szöveget adunk, azonban ez a szöveg is tartalmaz minden lényeges információt. Egy szubteszten belül a feladatok szövege csak az adatokban (felhasználandó elemek száma, konstrukciók hossza stb.) különbözik.

Mivel el akartuk kerülni, hogy az olvasási nehézségek a feladatmegoldás akadályai legyenek, szükség esetén a kísérletvezető felolvasta a feladat szövegét. A manipulatív feladatokat illusztráló példaként a 2. ábrán a Descartes-féle szorzatok képzésének 4 feladatát mutatjuk be.

A tanulók egy pedagógus felügyelete alatt (egyszerre maximum 6 tanuló) önállóan dolgoztak. Amikor egy feladat megoldásával elkészültek, jelentkeztek, és a kísérletvezető megoldásaikat a nyomtatott "Értékelő lap"-on bejelölték. A manipulatív tartalom vizsgálatának nyomtatott anyagait, a kísérletvezetők számára készített útmutatót, a feladatlapokat és az "Értékelő lap"-okat a függelékben közöljük.

II) Rakd ki az ábrán látható összeállítást az összes különböző módon, ha a NARANCS és a BARNA színű háromszögeket, a KÉK és a PIROS négyzeteket és a SÁRGA és a ZÖLD pálcikákat használatod fel!



2. ábra

A Descartes-féle szorzatok képzésének d feladata manipulatív tartalommal

3.3 A képi feladatok

A képi tartalommal végzett vizsgálathoz nyomtatott feladatlapokat használtunk. Minden egyes feladathoz egyforma kis ábrák sorozata tartozik. A tanulóknak ezeken az ábrákon kell megoldásaikat bejelölni, tehát egy-egy kis ábrán egy konstrukciót létrehozni.

A feladatokat itt is két tesztbe rendeztük el, ezeken belül az egy művelethez tartozó, de számértékben különböző feladatok egy szubtesztbe csoportosultak. Mindegyik szubteszt rövid szöveggel kezdődik, és a szubteszten belül a feladatokhoz tartozó utasítások csak a konkrét számértékekben különböznek. A feladatok szövegét, annak megértését az elővizsgálatok során többszörösen kipróbáltuk, a nem egyértelmű megfogalmazásokat igyekeztünk kiszűrni. Kritikus esetekben esetleg ugyanazt a feltételt két különböző módon is megfogalmaztuk. Például: "nem számít a pálcikák sorrendje, mindegy, hogy azokat milyen sorrendben rakod ki..."; vagy: "Ugyanazt a betűt egy összeállításban többször is felhasználhatod, vagyis az összeállításokon belül azonos betűk is szerepelhetnek."

A feladatok lényeges mozzanatait aláhúzással és/vagy nagybetűk használatával emeltük ki. A szövegek megfogalmazása során egyébként arra is törekedtünk, hogy a manipulatív, a képi és a formális tartalmú feladatok szövegei a megfogalmazás és a nyelvtani szerkezetek tekintetében csak a lehető legkisebb mértékben különbözzenek, így is biztosítva az összehasonlíthatóságot.

A feladatok több ábrát tartalmaztak, mint ahány különböző konstrukció valóban van, és erre fel is hívtuk a tanulók figyelmét. Általában két – három ábrával több szerepel a teszten, mint ahány konstrukciót fel kell sorolni. A tapasztalat szerint ez elegendő azoknak a hibáknak a nyilvántartásához, amikor a tanulók nem veszik észre, hogy felesleges, a feladat feltételei szerint azonosnak számító konstrukciókat készítettek.

Példaként itt is a Descartes-féle szorzatok *d* feladatát mutatjuk be a megoldással együtt (ld. 3. ábra). A teljes képi teszteket a függelékben közöljük.

Különböző speciális problémák vizsgálatához az itt bemutatottakon túl további feladatokat is készítettünk. Így például az ismétléses variációk képzé-

sének, az ismétlés nélküli variációk képzésének, az ismétlés nélküli kombinációk képzésének és az ismétléses permutációk képzésének minden egyes feladatstruktúrájába a tesztekben bemutatott feladatokon kívül még egy további képi tartalmú változatot is elkészítettünk. Ezekkel a feladatokkal itt nem foglalkozunk, különböző egyéb publikációkban közöljük e vizsgálatok eredményeit (ld.: Csapó, 1985d).



3. ábra

A Descartes-féle szorzatok képzésének d feladata képi tartalommal

3.4 A formális feladatok

Formális tartalommal a tanulók betűkből, számokból és egyéb jelekből állították össze a konstrukciókat. Itt az absztrakt jeleknek már nincs semmi önmagukon túlmutató tartalma, a feladatok megoldását nem segíti vizuális képzet, az elkészítendő konstrukció típusára, hosszára utaló ábra.

A szubtesztek itt is közös szöveg vezeti be, és a szubteszten belül a feladatok szövege csak a változó adatokban különbözik. A formális tartalomból következik, hogy az egyes konstrukciók vizuálisan kevésbé különböztethetők meg, mint a manipulatív vagy a képi tartalmakból alkotott konstrukciók. Ugyanakkor a kiinduló elemek rendelkeznek egy "természetes" sorrendiséggel, például a számok növekvő, vagy a betűk ábécé szerinti sorrendje. Ez a sorrendiség a műveletek kialakulásának fejlettebb fázisaiban jelent előnyt. A manipulatív feladatoknál a rendelkezésre álló eszközök, képi tartalomnál pedig az ábrák száma jelentett korlátot, és hozzávetőleg utalt az elkészítendő konstrukciók mennyiségére. A formális feladatokban ilyen tájékoztató pont illetve

korlát nincs, hacsak a papíron rendelkezésre álló helyet nem tekintjük korlátnak – az azonban jóval több a szükségesnél. Ez a mozzanat viszont a gyengébbek esetében jelent hátrányt. E két tényező alapján azt várhatjuk, hogy a formális tesztek az előző kettőhöz képest nagyobb differenciáló erővel rendelkezzenek.

A formális tesztek teljes terjedelmükben a függelékben közöljük. Példaként itt is a Descartes-féle szorzatok képzésének d feladatát mutatjuk be:

d) Sorold fel az összes különböző, HÁROM JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B betűt, a második helyre $a +$ vagy $a -$ jelet, a harmadik helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!

A megoldás:

$A+1$	$A-1$	$B+1$	$B-1$
$A+2$	$A-2$	$B+2$	$B-2$

3.5 A mérőeszközök validitása és reliabilitása

A klasszikus tesztelméletben (Guilford, 1965; Lienert, 1967; Lord-Novick, 1968) kidolgozott validitási és reliabilitási koncepciókat többnyire a normatív (norm-referenced) tesztek használata hívta életre. Normatív tesztként bármely tevékenység használható, amelynek valamely számszerű jellemzője a vizsgált tulajdonsággal (monoton változó) függvénykapcsolatban áll, és így alkalmas arra, hogy a vizsgált egyént egy populáció alapján megállapított normákhoz viszonyítsuk. A validitás és reliabilitás vizsgálata e függvénykapcsolat fennállásának bizonyítására szolgál, vagyis azt mérlegeli, hogy a teszt azt méri-e, amit mérni kívánunk vele, és megbízhatóan méri-e azt. A kidolgozott reliabilitásmutatók többsége azt a célt szolgálta, hogy segítségükkel a gyakorlatban széles körben használandó rövid és egyszerű pszichológiai tesztek tömören és gyorsan lehessen minősíteni.

A norma-orientált tesztelmélet alapfeltevéseiből kiindulva kidolgozott statisztikai mutatók nem feltétlenül alkalmazhatók a pedagógiai tesztekre, különösen akkor, ha azok az egyes tanulókat nem a csoportnormákhoz, hanem a mérendő tulajdonsággal kapcsolatban megállapított kritériumokhoz kívánják viszonyítani. Viszont a pedagógiai mérőeszközök sok olyan jellemzővel rendelkeznek, amely a validitás és reliabilitás mérlegelésének alapjául szolgálhat. Ezekkel a lehetőségekkel számolva kialakulóban van a **kritérium-orientált** (criterion-referenced) mérőeszközök új típusú elmélete (ld.: Popham, 1978).

Nem alkalmazhatóak a klasszikus kritériumok minden további megfontolás nélkül a kutatási célokra készült tesztekre sem. Ugyanis a normatív tesztek reliabilitást növelő tulajdonságai (pl. homogenitás, differenciáló erő, nagy vari-

ancia, 50%-hoz közel álló átlag, stb.) a kutató számára nem a priori értékek, legfeljebb némely esetben szükséges technikai feltételként jelentkeznek, máskor esetleg a vizsgálat céljai mellett ilyen követelményeket nem is lehet kielégíteni. Éppen ezért a reliabilitás és validitás klasszikus megközelítése az irodalomban széles körben vitatott, és gyorsan fejlődnek a tesztanalízis új eljárásai. A reliabilitás elmélete helyébe gyakran az "általánosíthatóságelmélet" (generalizability theory) lép, mely a vázolt nehézségeket kiküszöböli (ld.: Kamp, 1976). Sok új eljárást fejlesztettek ki a pedagógiai tesztek elemzésére is, amelyek alkalmazkodnak az oktatásban használt értékelő eszközök sajátosságaihoz és szükségleteihez.

A tudományos vizsgálatok céljaira készített mérőeszközöknek vannak olyan vonásai, amelyekkel a tömeges felhasználásra szánt tesztek nem rendelkeznek. Nem, vagy kevésbé korlátozott a terjedelem, és a vizsgálat céljaira gondosan megválogatott tevékenységeket használnak. Ilyen esetekben a tesztek megfelelőségének elemzésére is sokkal több lehetőség kínálkozik, mint a szokásos formulák alapján kiszámított jóságmutatók.

Mindezek alapján a jóságmutatók kérdéseivel e pontban csak röviden foglalkozunk. Úgy véljük, hogy a hátralevő fejezetek anyaga adekvát alapja lehet a reliabilitás és a validitás mérlegelésének. A 8.3 pontban néhány, e problémákkal összefüggő speciális kérdést külön is elemzés tárgyává teszünk.

A validitás értékelésére használt leggyakoribb eljárások közül esetünkben nem alkalmazhatjuk a más mérőeszközökkel való megfelelés vagy ismert tulajdonságra való vonatkoztatás módszereit, hiszen egy alapvetően ismeretlen pszichikus rendszer vizsgálatáról van szó. Nincs értelme a prediktív validitás vizsgálatának, hiszen tesztheink nem vállalkoznak predikcióra.

Elemezhetjük viszont a konstruktív, a strukturális illetve a triviális validitást. Ha a felvázolt hipotetikus rendszert tekintjük a tesztelendő pszichikus területnek, alkalmazhatjuk a kritérium-orientált értékelés eszközrendszerét (ld.: Csapó, 1988), megvizsgálhatjuk, hogy a tesztfeladatok megfelelően reprezentálják-e a mérés tárgyát (item - objective congruence), az egyes feladatok azonos módon vannak-e a mérendő tartalomról levezetve (derivatív homogenitás). Amint e fejezet első pontjában leírtuk, a mérőeszközök pontosan leképezik a kombinatív műveleti képesség feltételezett rendszerét, minden műveletnek egy-egy szubtesztet feleltetve meg. A szubtesztek pedig vagy tartalmazzák a számításba vehető feladatok mindegyikét, vagy megfelelő módon reprezentálják az összes lehetséges feladatot. Ily módon a konstruktív illetve strukturális validitás követelményeit a mérőeszközök kielégítik, pontosan leképezik az elméleti modellt. Hogy az elméleti modell megfelel-e, vagy milyen mértékben felel meg a valóságnak, az ebben az esetben nem validitási kérdés, hanem az egész empirikus vizsgálat egyik alapproblémája. Ha a feladatok rendszerére megfelelő módon képeztük le a kombinatív műveleti képességet, akkor már csak a feladatoknak a validitását kell bizonyítani. A feladatokban

dolgok megadott halmazából kell megadott feltételeknek megfelelő összeállításokat létrehozni, tehát a megkívánt tevékenység pontosan egybevág a kombinatív művelleti képesség meghatározásában leírt tevékenységgel.

A strukturális validitáson túl természetesen a validitásnak vannak teoretikusan nem tisztázható összetevői is. Elméletileg nem lehet például meghatározni (néha empirikusan sem), hogy a teljesítményt mennyiben határozza meg a vizsgált képesség fejlettsége, és mennyiben függ más pszichikus tényezőktől (motiváltság, kitartás, stb).

A klasszikus tesztelméletben a reliabilitás vizsgálatának két alapvető iránya a párhuzamos tesztelés (megismételt mérés) és a tesztek belső konzisztenciájának vizsgálata. A megismételt mérésről a vizsgálatok terjedelme miatt eleve le kell mondanunk.

A feladatrendszer egy teljes struktúra különböző pontjainak mérésére hivatott. Bár feltételezésünk szerint sem függetlenek ezek egymástól, nem támasztjuk azt az igényt, hogy minden feladat "ugyanazt mérje". Így a tesztek belső konzisztenciája önmagában nem érték számunkra. Ennek ellenére nem érdemtelen a konzisztencia vizsgálata.

A szakirodalomban több tucatnyi reliabilitásmutató ismeretes, amely a reliabilitás alsó határára ad becslést. A formulák között vannak "liberálisok" és "szigorúbbak". Vannak például olyanok, amelyekkel mind a hat tesztre 0,99 vagy nagyobb reliabilitást találtunk. (Pl. a képi "VARIÁLÁS" tesztre a *Horst formula* 0,999 reliabilitást ad.) Ez nem meglepő, ha arra gondolunk, hogy a tesztekben 140-200 konstrukciót kell előállítani 400-600 elemi döntést elvégezve. Figyelembe véve, hogy ideális esetben egy 15-20 itemes feleletválasztásos teszttel is el lehet érni 95-98%-os reliabilitást, várható tesztjeink magas reliabilitása.

Hogy a tesztek konzisztenciája közötti különbséget jobban kiemelhessük, egy "szigorúbb", homogén tesztekre kidolgozott formulát választunk. A Lienert (1967, 225-233. o.) által közölt formulák közül a *Gulliksen-formula* adja a legalacsonyabb becslést.

A formula:

$$(1) \quad r_{rel} = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{(\sum r_{it} \sqrt{pq})^2} \right]$$

ahol:

n a feladatok száma,

p a nehézségi index (jól megoldott feladatok relatívgyakorisága),

q = 1 - p,

r_{it} a feladat-teszt korreláció.

A 4. táblázatban a *Gulliksen-formula* alapján számított reliabilitási mutatókat (pontosabban azok alsó határára adott becsléseket) foglaljuk össze, az egyes tartalmak teljes feladatrendszerére és a tesztekre és szubtesztekre. A

szubtesztekre és a szintekre vonatkozó számításokhoz felhasznált adatok az 5., 6., és 7. fejezetek megfelelő táblázataiban és ábráin megtalálhatók. Az eredeti formulákban az alternatív változók alapján számított korrelációs együtthatót szokás használni. Mi a J érték alapján számított korrelációs együtthatókat vettük alapul, ezért a formula a szokásosnál kissé még alacsonyabb becslést szolgáltat.

4. táblázat. Konzisztencia-mutatók a Gulliksen-formula alapján

Feladategyüttes	Manipulatív	Képi	Formális
Az adott tartalmú teljes feladatrendszer	0,883	0,964	0,945
"VARIÁLÁS" teszt	0,862	0,947	0,933
"KOMBINÁLÁS" teszt	0,901	0,923	0,757

Az így kiszámított mutatók mezőnye már jól széthúzódik. Ennek ellenére a képi tartalomra 0,964-es értéket kaptunk, és a tesztek közül is csak kettő adata marad 0,9 alatt.

A formula alapján számított konzisztencia-érték annál nagyobb, minél közelebb áll a jó megoldások gyakorisága az 50%-hoz, és minél nagyobb a feladat-teszt korreláció. Vizsgálatunk szempontjából egyik tulajdonságnak sincs különösebb értéke, így az alacsony konzisztencia önmagában nem okoz nehézséget.

Mivel meglehetősen nagy elemszámú mintákkal dolgoztunk, eredményeink szignifikanciája elég magas. Ezért nem fogjuk a későbbiekben minden adat szignifikanciáját elemezni, hanem itt összefoglalóan adunk becslést a szignifikanciaértékekre.

A táblázatokban megadjuk az eredmények átlagát és relatív szórását. Ezekből a konfidencia-intervallum az átlag %-ában a

$$(2) \quad \Delta = \frac{t_p \cdot CV_x \cdot \bar{x}}{100 n}$$

formulából adódik.

160 fős mintára 50% relatív szórás mellett a konfidencia-intervallum

$p=0,05$ valószínűségnél az átlag $\pm 7,8\%$ -a,

$p=0,01$ valószínűségnél az átlag $\pm 10,3\%$ -a.

500 fős mintára 50% relatív szórás mellett a konfidencia-intervallum

$p=0,05$ valószínűségnél az átlag $\pm 4,3\%$ -a,

$p=0,01$ valószínűségnél az átlag $\pm 5,6\%$ -a.

A mintanagyság az alkalmazott adatoknál nagyobb, a relatív szórás többnyire kisebb, mintegy 30% körüli, így a konfidenciahatár a jelzettnél kisebb.

Korrelációs együtthatókat csak a nagyobb minták eredményei alapján közlünk. 500 fős mintanagyság mellett a korrelációs együttható szignifikanciahatárai:

$p=0,05$ esetén $r_{kr}=0,09$

$p=0,01$ esetén $r_{kr}=0,12$

$p=0,001$ esetén $r_{kr}=0,15$.

4. AZ EMPIRIKUS VIZSGÁLAT

4.1 Az adatfelvétel

Az empirikus vizsgálat megtervezése és lebonyolítása során az elméleti alapvetés konzekvenciáin túl tekintettel kell lennünk bizonyos gyakorlati feltételekre, korlátozó körülményekre és a gazdaságosság szempontjaira.

A vizsgálat feladatait úgy határoztuk meg, hogy az adott lehetőségeket alapul véve általános célunkból, a kombinatív műveleti képesség struktúrájának és fejlődési folyamatának leírásából minél többet megvalósíthassunk, a lehető legrészletesebb, legpontosabb és legmegbízhatóbb adatokhoz, összefüggésekhez jussunk. Az adatfelvétel megtervezéséhez a vizsgálat általános céljait a következő formában operacionalizálhatjuk:

(1) Célunk mindenekelőtt a feltételezett műveletrendszer minél részletesebb letapogatására alkalmas értékelő eszköz, tesztrendszer kidolgozása, kipróbálása.

(2) A kombinatív műveletek működésének vizsgálata különböző absztrakciós szintű tartalmakkal.

(3) A műveletek összefüggéseinek, a műveletrendszer belső struktúrájának feltárása, az elméleti modellben felvázolt kapcsolatok empirikus ellenőrzése.

(4) A műveleti képességek fejlettségi színvonalának felmérése az iskolai oktatás néhány döntő periódusában, a fejlődési folyamatok felvázolása.

(5) A kombinatív műveleti képesség és más műveleti képességek (logikai, rendszerezési) kapcsolatának elemzése.

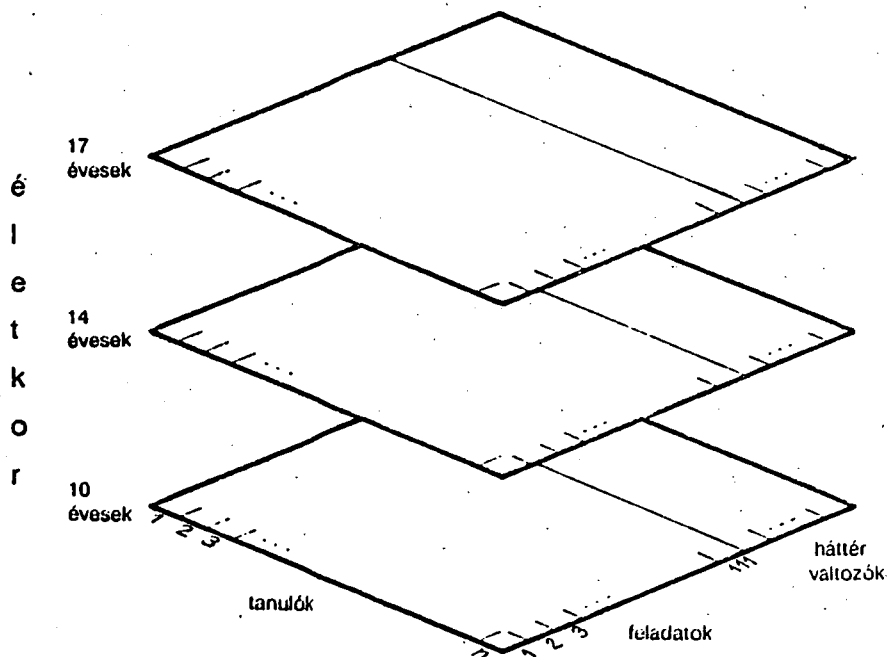
(6) A kombinatív képesség kapcsolata az intelligenciával és a kreativitással.

(7) A kombinatív képesség és a környezeti tényezők közötti összefüggések feltárása.

A fejlődési folyamatok becsléséhez minimálisan három életkorban végzett mérést tartottunk szükségesnek. Ez a három pont legalkalmasabban az iskolai oktatás három fordulópontja, az alsó tagozat vége (általános iskola 4. osztály),

az általános iskola vége (8. osztály) és az az időpont, amikor a népesség döntő hányada számára befejeződik az intézményes oktatás (középiskola 3. osztály). Természetesen a három pontban való adatfelvétel még a jelzett intervallumban (kb. 10-17 év) is csak a fejlődési folyamat durva közelítését teszi lehetővé, és számíthatunk arra, hogy bizonyos műveleteknél a fejlődési folyamat jelentős része a vizsgált intervallumon kívülre esik.

Az adatfelvétel során lényegében a 4. ábrán látható háromdimenziós adattömböt kell előállítanunk, melynek dimenziói az életkor, a tanulók és a feladatok a háttérváltozókkal. Az adattömb felvétele szigorú értelemben longitudinális vizsgálatot igényelne, annak költségei azonban az általa elérhető előnyökhöz képest aránytalanul magasak. Ezért a követés helyett három különböző (reprezentatív) mintát használtunk és keresztmetszeti vizsgálatot végeztünk. Így az adattömb az életkor dimenzió mentén nem "átjárható", ez azonban számunkra nem jelent lényeges hátrányokat.



4. ábra
Az adattömb felépítése

Nagyobb mintára csak az összefüggésvizsgálatokhoz van szükség, és erre a középső, a nyolcadikos korosztály látszott legalkalmasabbnak. Így további egyszerűsítésként a két másik minta kisebb lehet. Az $n_1=150$, $n_2=500$ és

$n_3 = 150$ mintanagyságokat a szükséges szignifikanciaszint eléréséhez elegendőnek tartottuk.

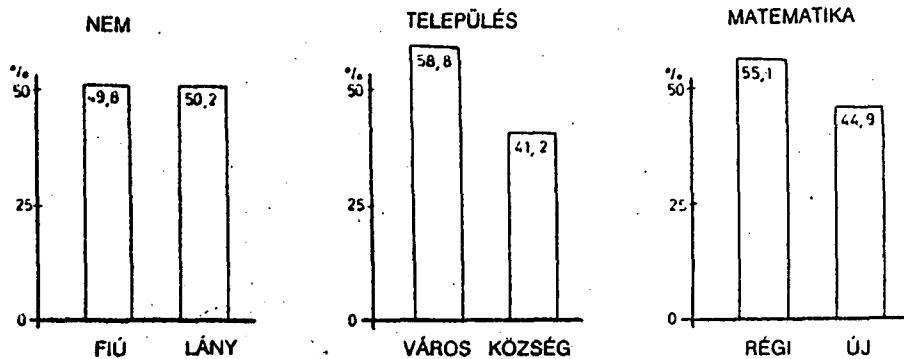
Mivel a kis mintákon nem kívántunk összefüggésvizsgálatot végezni, nem szükséges, hogy minden feladatot ugyanaz a tanuló oldja meg. Ezt kihasználva további egyszerűsítést jelentett (egy tanuló kevesebb ideig dolgozott), hogy a feladatokat így több, kb. 200 fős, ugyancsak reprezentatív minta között oszthattuk szét. Ezért az adattömb a kis mintáknál a feladatdimenzió mentén sem "átjárható".

A vizsgálatot Csongrád megyében végeztük 1980 május-júniusában, 13 városi iskolai és 13 falusi iskolai osztályban. A felmérésbe bevont nyolcadik osztályok összlétszáma 734 fő volt, végül az értékelhető feladatlapok száma általában 650 körül mozgott, és a hiányzó és hibás adatokat kihagyva az érvényes válaszok száma minden változónál meghaladta az 550-et. A teszteket a tanulók külön erre a célra szervezett foglalkozásokon, pedagógusok irányításával oldották meg. (A módszert a tesztek bemutatása kapcsán már részletesen ismertettük.) A három képességrendszer együtt átlagban 10-12 órát, ezen belül a kombinatív feladatok megoldása összesen és átlagosan 5 óra 36 percet igényelt. A tanulók a feladatlapokon heti egy vagy két alkalommal dolgoztak egy-egy órát.

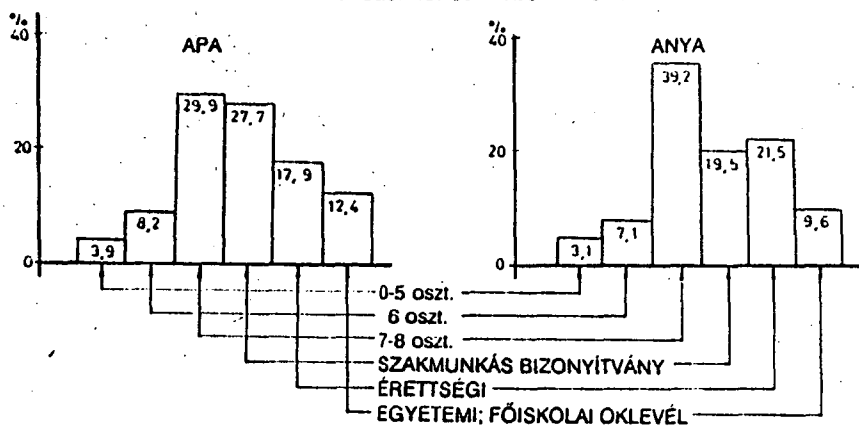
A kis minták egy-egy tanulója két-három tesztet oldott meg, ugyancsak pedagógusok felügyelete mellett, két-három különböző alkalommal. A kisebb minták felméréseit 1981. február-márciusban végeztük.

Minden tanulóról, aki a vizsgálatunkban szerepel, kitöltöttünk egy adatlapot, mely a tanuló iskolájának, szociális háttérének és tanulmányi eredményeinek legfontosabb adatait tartalmazza. Ezeket az adatokat a 9. fejezet elemzéseiben fogjuk felhasználni.

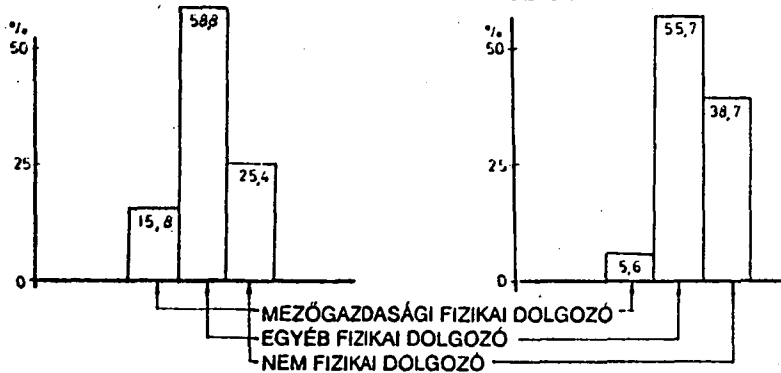
A nyolcadik osztályos mintát néhány fontosabb háttérváltozóval jellemezzük. E változók szerinti megoszlását a 5. ábrán mutatjuk be.



A SZÜLŐK ISKOLAI VÉGZETTSÉGE



A SZÜLŐK FOGLALKOZÁSA



(n = 625)

5. ábra
A 14 éves minta megoszlása

4.2 Az adatfeldolgozás

A mérés során a tanulóknak az összes, a feladat feltételeinek megfelelő kombinatorikai konstrukciót kellett felsorolniuk; az adatfelvétel közvetlen produktumai és az adatfeldolgozás "bemenő adatai" ezek a felsorolások. Ezeket az adatokat kell megfelelő kódolással – lehetőleg lényeges információvesztés nélkül – feldolgozásra alkalmas formában reprezentálnunk.

Megfelelő kódolási eljárás lehet az, ha alapul veszünk egy felsorolási sorrendet, és a konstrukciókat ebben a sorrendben megszámozzuk, majd e sorszámokat rendeljük a konstrukciókhoz, és a továbbiakban a konstrukciókat e számokkal jelöljük. Az eljárás a formális tartalom ismétlés nélküli kombinációk képzésének b feladatán szemléltetve:

$$AB=1, AC=2, AD=3, BC=4, BD=5, CD=6$$

A feladat feltételei szerint azonosnak számító konstrukciókat ugyanazzal a kódszámmal jelöljük (pl. esetünkben $AB=1$, és $BA=1$, mert kombinációknál a sorrend nem számít). Mivel azt is nyilván kell tartanunk, hogy a tanuló nem csinált-e a szükségesnél több konstrukciót, illetve mert egy feladathoz mindig azonos hosszúságú adatsort kell rendelnünk, a feladat feltételeinek nem megfelelő konstrukciót 0-val jelöltük, és szükség esetén a felsorolást a megfelelő hosszúságúra ugyancsak 0-val egészítettük ki. E számsor hossza általában kettővel több annál, mint ahány különböző konstrukció van, és megegyezik azzal a számmal, ahány kis ábrát a képi tartalom feladata tartalmaz. Például egy ilyen számsor, ami az előző felsorolást reprezentálja: (1,2,3,4,5,6,0,0).

E jelöléssel a feladatban nyújtott teljesítményről kvalitatív adatot, a gondolkodás stratégiáját is reprezentáló vektort kaptunk. Előnyös sajátossága, hogy segítségével az azonos struktúrájú, de különböző tartalmú feladatok tökéletesen összehasonlíthatók. Hátránya bizonyos információvesztés, nem tudjuk ugyanis, hogy amennyiben a kódszám több ekvivalens konstrukciót jelöl, az adott esetben melyikről van szó. Ez azonban már a gondolkodásnak olyan finom, stílusbeli különbségeire utalhat, aminek vizsgálata jelenleg nem célunk.

Az alkalmazott jelöléssel az adatok eredeti mennyiségét mintegy harmadára, kb. 1000 tanulóval, a teljes rendszer mintegy 140 feladatával és feladatonként kb. 10 elemű vektorral számolva hozzávetőleg 1400000-re sikerült redukálnunk.

Ez az adatmennyiség a közvetlen számítógépes feldolgozáshoz még mindig túlságosan nagy, különösen ha figyelembe vesszük, hogy a teljes adatbázis a rendszerezési és a logikai képesség hasonló nagyságrendű adathalmazát és a háttérváltozók adatait is tartalmazza. Meg kellett tehát találnunk az adatok feldolgozásának és elemzésének azt a stratégiáját, melynek minden

lépcsőjében kezelhető mennyiségű adattal dolgozva áttekinthető bonyolultságú modellekhez jutunk. (Az elemzés stratégiájáról bővebben ld.: Csapó, 1983c.)

A vektorok a gondolkodás finomszerkezetének minőségi vizsgálatához, a felsorolások mögött meghúzódó stratégiák feltárásához és elemzéséhez szükséges részletességgel szolgáltatnak adatokat. Az adatok nagy mennyisége jelentős számítástechnikai kapacitást, és speciális, a kvalitatív adatok elemzésére alkalmas technikákat igényel (ld.: Csapó, 1987d). Ezért a feldolgozásnak ezt a formáját kezdetben csak a nyolcadik osztályosok mintájára és csak a manipulatív feladatokra végeztük el. Az eredmények bemutatása e könyv kereteit mindenképpen meghaladja, azokat a teljes anyag feldolgozása után külön tanulmányban szándékozunk közölni. E munkában csak a kvantitatív elemzések eredményeivel foglalkozunk.

Ahhoz, hogy a kvantitatív adatok feldolgozásának kialakult technikáit használhassuk, adatainkat kvantifikálni kell, a felsorolásokhoz a megoldások jóságát, a teljesítményt jellemző számértéket kell rendelnünk.

A megoldások jóságát jellemző, 1-re normált mutatótól elvárjuk, hogy értéke akkor legyen 1, ha a tanuló minden szükséges konstrukciót felsorolt, de nem írt fel egyetlen felesleges (tehát egy korábbi megismétlődő) konstrukciót sem. Elvárjuk továbbá, hogy a mutató a jó konstrukciók számának monoton növekvő, a felesleges konstrukciók számának monoton csökkenő függvénye legyen, továbbá értéke akkor legyen 0, ha egyetlen jó konstrukciót sem tartalmaz a felsorolás, vagy pedig az ismétlődő konstrukciók száma aránytalanul magas (pl. megegyezik a lehetséges különböző konstrukciók számával vagy több annál).

Belátható, hogy a felsorolt követelményeket kielégíti a következő függvény:

$$(3) \quad J = \frac{x(T-y)}{T^2}$$

ahol T a teljes felsoroláshoz tartozó konstrukciók (a lehetséges különböző konstrukciók) számát jelöli, x a felírt különböző jó, y pedig a felírt felesleges konstrukciók száma. Ha még kikötjük, hogy az $y > T$ esetekben $J=0$, akkor J maga a keresett, a feladat jóságát jellemző skaláris mennyiség, melynek értéke 0 és 1 között változik.

A J kiszámításához már csak feladatonként két adatra, x és y értékére van szükség, a statisztikai számítások "bemenetül" szolgáló J értékek mennyisége pedig a megoldott feladatok számával vált egyenlővé. A továbbiakban bemutatandó számítások összesen hozzávetőleg 110000 feladatmegoldásra épülnek, a strukturális elemzések alapját képező mintánál pedig mintegy 60000 a megoldott feladatok száma.

A szubtesztek, tesztek indexeinek elkészítéséhez célszerű a feladatokat a bonyolultságukkal arányos értékkel figyelembe venni, ezért szükségünk van egy súlyozott mennyiségre is. Jól működő súlyozott mértéket (G) kapunk, ha J -t T -vel megszorozzuk (a jelölések megegyeznek a (3) formulában használt jelölésekkel):

$$(4) \quad G = \frac{x(T-y)}{T}$$

A G értékek összegzésével elméletileg rangskála szintű skálát kapunk. Mivel azonban összességében a jó konstrukciók számához képest kevés a feleslegesek száma, skálánk gyakorlatilag jó közelítéssel kielégíti az arányskála tulajdonságait, értéke megközelítően a jó konstrukciók számával arányos.

Bizonyos esetekben szükségünk van a feladat alternatív (jó/nem jó) minősítésére. Alternatív skálát kapunk az " $A=1$, ha $J=1$, egyébként $A=0$ " definícióval.

A bevezetett mutatók használatát egy példa segítségével foglaljuk össze. Például az ismétlés nélküli variációk képzésének a feladatánál használjuk az $AB=1$, $AC=2$, $BA=3$, $BC=4$, $CA=5$, $CB=6$ jelölést, és kódoljuk annak a tanulónak a megoldását, aki az AB , BA , AC , AB felsorolást produkálta.

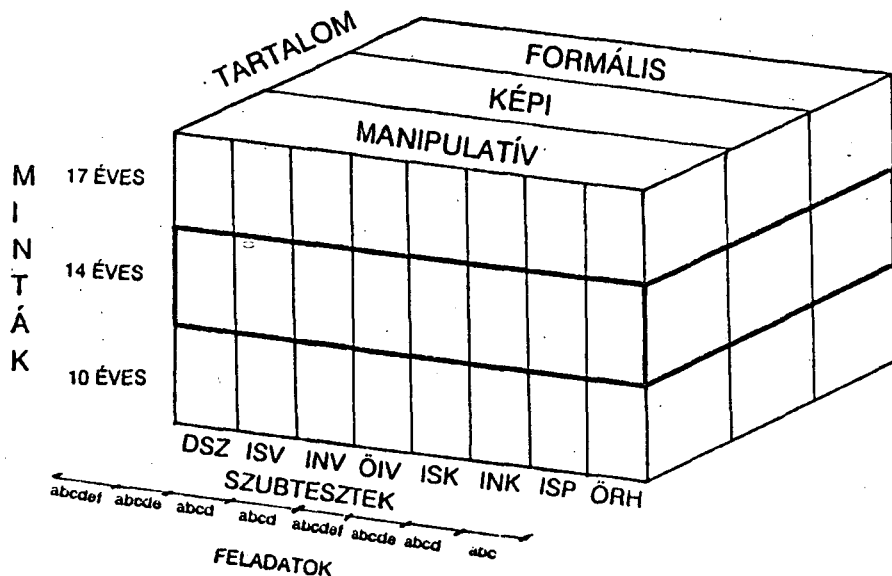
adat	példa
felsorolás:	AB, BA, AC, AB
vektor:	$(1,3,2,1,0,0,0,0)$
számpár (x,y) :	$(3,1)$
a megoldás jósága, J :	$J=0,6$
súlyozott mérték, $G=J \cdot T$:	$G=3,6$
alternatív változó: $A=[J]$	$A=0$

A kombinatív műveleti képesség rendszerszemléletű leírásának jobban megfelelne az egésztől a rész felé haladó tárgyalási mód, a környezeti tényezők hatásának és a globális összefüggéseknek az elemzésétől elindulva a részek és a finomszerkezet tárgyalásáig eljutni. Úgy gondoljuk azonban, hogy egy, az eredményeket lépésenként bizonyítani kívánó tudományos dolgozatban célszerűbb az elemzések kronologikus sorrendjét követni, és a feladatok, szubtesztek, tesztek eredményeinek bemutatása után rátérni a kombinatív képesség belső szerkezetének, majd a környezeti hatásoknak a leírására. Így állást foglalva azonban az eredmények elrendezésének, a leírás struktúrájának még mindig többféle lehetősége van.

A 6. ábrán összefoglaltuk a vizsgálat feladat- és adatrendszerét. Látható, hogy az adattömb több dimenzió mentén is átjárható, többféle összehasonlításra van lehetőség. A vizsgálati anyag tárgyalása legalább kétféleképpen hierarchizálható: kiemelünk egy életkort, azon belül tárgyaljuk a három különbö-

ző tartalmú tesztrendszer eredményeit, majd áttérünk a következő korosztályra; vagy: kiemelünk egy tartalmat és azon belül elemezzük a különböző korú tanulók teljesítményét.

Úgy tűnik, ez utóbbi megoldásnak több előnye is van. Ezért eredményeink bemutatásában a feladatok tartalmának dimenziója mentén haladunk végig, egy-egy tartalomnál a megfelelő fejlődési folyamatot is bemutatva. Az ily módon "szétválasztott" tartalmak között kínálkozó összehasonlítási lehetőségeket a strukturális elemzések kerelében fogjuk kihasználni.



6. ábra
A vizsgálat feladat- és adatrendszere

A dolgozat hátralevő részében a tömörebb fogalmazás vagy pusztán a terjedelemmel való takarékoskodás okán gyakran kényszerülünk arra, hogy rövidítéseket használjunk. Ezért kialakítottuk a feladatok, szubtesztek, tesztek, szintek rövidítésének egy jól áttekinthető és könnyen memorizálható jelölésrendszerét, melyet részben már a 6. ábrán is feltüntettünk.

A feladatok tartalmának jelölésére a szint nevének nagy kezdőbetűjét használjuk:

M = manipulatív

K = képi

F = formális

A teszteket a teszt nevének nagy kezdőbetűjével jelöljük:

V = VARIÁLÁS

K = KOMBINÁLÁS

A szubtesztek jelölésére három nagybetűt használunk:

DSZ = Descartes-féle szorzatok képzése

ISV = ismétléses variációk képzése

INV = ismétlés nélküli variációk képzése

ISK = ismétléses kombinációk képzése

INK = ismétlés nélküli kombinációk képzése

ISP = ismétléses permutációk képzése

ÖRH = az összes részhalmaz képzése

A feladatok jelölésére kisbetűket használunk, a betűk mindhárom szinten a 2. és a 3. táblázatban jellemzett struktúrával rendelkező (illetve a függelékben közölt tesztekben ugyanezzel a betűvel jelölt) feladatokra utalnak.

Ezeket a jelöléseket többféle kombinációban fogjuk használni, betartva azonban a következő sorrendet: tartalom – teszt – szubteszt – feladat. Például az MK a manipulatív kombinálás tesztet, az KDSZb a képi szinten a Descartes-féle szorzatok b feladatát jelöli. Természetesen az olvasást megkönnyítendő, lehetőség szerint tartózkodunk a jelölések kizárólagos használatától.

5. MANIPULATÍV TARTALOM

5.1 A manipulatív feladatok teljesítményei

Ahogy korábban már jeleztük, e dolgozatban csak a teljesítmények mennyiségi jellemzőinek elemzésével foglalkozunk, és legfeljebb csak ezekkel összefüggésben érintjük a minőségi különbségek kérdéseit.

A feladatokban nyújtott teljesítmények jellemzésére többféle mutatót is használhatunk. Ezekből választottunk ki hatot, és ezt a hat adatot minden feladatra és mindhárom életkori mintára megadjuk. A manipulatív feladatok eredményeit az 5. és 6. táblázatokban közöljük. A táblázatokban egymás mellé helyeztük a három korosztály eredményeit, egy sorba ugyanannak a feladatnak az adatai kerültek.

Az első adat, amit minden feladatról közlünk, a jó konstrukciók átlaga: \bar{x} . Ugyanennek a változónak a relatív szórását (CV_x) adjuk meg másodikként %-ban. A harmadik adat a jó és a felesleges konstrukciók számából kialakított J érték átlagának (\bar{J}) és a feladatokban előállítandó konstrukciók T számának a szorzata, azaz $\bar{G} = \bar{J} \cdot T$; a negyedik adat pedig J relatív szórása: CV_J . Ezeken kívül megadjuk a \bar{J} érték 100-szorosát, valamint a hibátlan megoldást nyújtó tanulók (akiknek a megoldására $J=1$) arányát %-ban.

Ezek az adatok önmagukban, egymással összevetve, illetve más feladatok hasonló adataival összehasonlítva alkalmasak a műveletvégzés jellegzetességeinek és a műveletek fejlettségének a jellemzésére. Az x és a G közötti különbséget a feleslegesen felírt konstrukciók okozzák. Ahol ez a két érték megegyezik, vagy különbségük kicsi, ott a tanulók nem, vagy csak kevés felesleges konstrukciót írtak fel.

A $100J$ és a hibátlan megoldáshoz tartozó gyakorisági értékek ugyancsak összehasonlíthatók, mindegyik értéke 0 és 100 között változik. Míg azonban a hibátlan megoldások gyakoriságának értékét csak a tökéletes megoldások növelik, a $100J$ értékéhez minden tanuló hozzájárul, aki az adott feladatban a J -re 0-nál nagyobb értéket produkált. Ebből következik, hogy a kettő közül mindig a $100J$ a nagyobb, és különbségüket pontosan a nem tökéletes megoldások

5. táblázat. A manipulatív "VARIÁLÁS" teszt feladatainak eredményei

Feladat		T	10 évesek						14 évesek						17 évesek					
			\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J	J=1		\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J	J=1		\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J	J=1	
				%		%	100 \bar{J}	%		%		%	100 \bar{J}	%		%		%	100 \bar{J}	%
Descartes-félc szorzatok képzése	a	4	3,72	23	3,71	23	93	87,4	3,66	25	3,64	26	91	83,6	3,75	23	3,68	26	92	86,7
	b	6	5,46	25	5,45	25	91	80,8	5,56	21	5,54	22	92	82,2	5,31	22	5,26	19	88	64,1
	c	12	10,78	26	10,43	33	87	61,6	10,84	21	10,74	22	89	67,6	10,44	28	8,33	40	82	65,6
	d	8	6,26	37	6,23	37	78	56,3	6,80	30	6,70	32	84	63,6	6,95	26	6,89	15	86	64,1
	e	12	10,50	27	10,06	35	88	61,6	10,88	21	10,71	24	89	65,1	11,19	19	10,90	25	90	72,7
	f	16	12,81	32	12,38	35	77	33,1	11,58	41	11,33	43	70	36,6	13,77	21	13,38	26	84	35,2
Ismétléses variációk képzése	a	4	3,87	13	3,87	13	97	92,7	3,87	14	3,84	16	96	89,9	3,66	17	3,66	18	92	75,0
	b	8	6,60	26	6,55	26	87	47,0	7,17	17	7,10	19	88	58,6	6,42	27	6,40	27	80	46,1
	c	9	7,87	22	7,81	23	87	60,3	8,33	17	8,24	17	92	74,4	7,82	25	7,79	25	87	64,1
	d	16	14,09	18	13,64	25	85	45,7	14,13	20	13,98	21	87	57,0	14,53	16	14,32	18	90	53,1
	e	16	12,92	26	12,49	31	78	28,5	11,23	29	11,04	29	68	9,9	13,03	23	12,04	35	75	27,3
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	6	4,98	27	4,97	27	83	59,6	5,29	23	5,23	24	87	68,9	4,88	29	4,84	35	81	55,5
	b	6	5,33	23	5,29	23	89	70,2	5,32	24	5,23	26	87	69,5	5,23	28	5,21	20	87	71,9
	c	12	10,95	19	10,59	26	88	54,3	10,53	22	10,40	23	86	61,0	11,15	18	10,97	24	91	53,9
	d	20	16,15	24	15,81	26	79	33,8	16,95	24	16,88	27	83	48,2	15,95	28	15,76	29	79	40,6
Az összes ismétléses variáció képzése	a	6	4,15	29	4,13	29	69	20,3	4,40	31	4,35	32	73	32,6	4,19	28	4,09	28	68	19,2
	b	12	8,94	41	7,98	51	67	17,9	8,85	29	8,73	31	71	24,7	9,40	32	8,32	44	69	14,6
	c	14	7,09	51	5,33	81	38	5,7	8,60	39	8,47	41	61	11,5	7,87	42	5,86	70	42	3,1
	d	20	15,63	24	15,08	26	75	16,3	14,71	27	14,49	29	72	19,2	15,59	22	15,16	23	76	16,9

6. táblázat. A manipulatív "KOMBINÁLÁS" teszt feladatainak eredményei

Feladat			T	10 évesek							14 évesek							17 évesek						
				\bar{x}	CV_X %	\bar{G}	CV_J %	$100\bar{J}$	$J=1$ %	\bar{x}	CV_X %	\bar{G}	CV_J %	$100\bar{J}$	$J=1$ %	\bar{x}	CV_X %	\bar{G}	CV_J %	$100\bar{J}$	$J=1$ %			
Ismétléses kombinációk képzése	a	3	2,94	10	2,31	24	77	35,5	2,90	14	2,29	27	78	37,0	2,96	8	2,37	32	79	48,5				
	b	4	3,62	22	2,30	55	60	30,9	3,61	23	2,39	52	59	29,7	3,34	32	2,37	62	59	38,0				
	c	5	4,23	26	2,44	78	49	20,5	4,01	31	2,40	75	48	22,7	3,82	37	2,49	84	50	35,4				
	d	6	5,47	16	4,24	12	71	33,3	5,26	22	4,25	41	70	42,5	5,18	25	4,35	44	73	52,3				
	e	10	7,23	29	4,91	49	49	4,1	7,09	35	5,88	49	58	12,3	6,62	43	4,58	75	46	19,2				
	f	10	9,07	15	7,53	31	75	28,5	8,47	21	7,21	38	72	34,1	8,26	27	7,02	48	70	46,9				
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	3	2,96	8	0,41	232	14	9,7	2,88	14	1,56	91	52	46,2	2,93	12	1,19	122	40	37,4				
	b	6	4,58	22	2,84	54	41	6,0	5,12	26	4,25	46	70	45,1	5,17	21	3,87	53	65	40,7				
	c	10	7,67	25	5,44	51	54	10,5	8,20	25	7,26	40	72	37,9	8,18	25	6,61	51	66	39,0				
	d	10	5,55	41	3,60	62	36	0,8	6,50	35	5,29	53	52	10,7	6,13	39	4,08	67	41	5,7				
	e	15	6,69	47	4,46	65	30	0,0	7,72	47	6,26	60	41	1,7	6,82	60	5,12	77	34	1,6				
Ismétléses permutációk képzése	a	3	2,89	16	2,86	18	95	91,0	2,68	28	2,67	28	89	78,7	2,92	12	2,88	18	96	92,7				
	b	6	5,10	21	5,04	22	84	46,3	5,05	27	5,00	28	83	56,2	5,50	18	5,49	18	92	71,5				
	c	12	9,04	28	7,76	44	65	9,7	8,31	37	8,17	38	67	16,8	9,15	33	8,09	44	67	15,4				
	d	10	7,56	34	5,87	47	59	6,7	6,96	36	6,81	37	68	14,8	8,27	26	6,26	55	63	2,4				
Az összes részhalmaz képzése	a	3	1,47	58	1,27	76	42	22,8	1,82	56	1,58	67	51	32,4	1,74	59	1,55	72	52	34,6				
	b	7	2,28	107	1,84	144	26	18,7	3,25	86	2,73	106	38	24,8	3,07	91	2,59	149	37	26,9				
	c	15	4,72	111	4,23	123	28	0,8	5,92	99	5,27	112	34	6,8	6,66	87	6,08	99	41	13,8				

dások összessége adja. E két utóbbi mennyiség egyébként a feladatok közötti összehasonlításokra is alkalmas.

A táblázatokban a sorok elején feltüntettük a feladatokhoz tartozó T értékeket, a lehetséges különböző konstrukcióknak a számát. Ez egyben a megfelelő feladatok x és G értékeinek a maximumát is jelenti.

A manipulatív feladatokról összességében elmondható, hogy ezek megoldása során a tanulók mindhárom életkorban viszonylag magas teljesítményt nyújtottak.

Az itt következő elemzéseket elsősorban a legnagyobb (így legmegbízhatóbb információt szolgáltató), a 14 éves minta eredményeire alapozzuk, alkalmas kontrollként természetesen építve a másik két minta eredményeire is.

A Descartes-féle szorzatok képzésének (DSZ) feladataiban a megoldások egy esetet kivéve (f feladat) meghaladják a 80%-ot. Lényegében csak a d és az f feladat tér el jelentős mértékben a 0,9 körüli J értéktől, mindkét feladat kettőnél több elemű konstrukciók előállítását igényli. Az \bar{x} és a \bar{G} közötti eltérés egyik feladatban sem jelentős, a felesleges konstrukciók száma elenyésző. A J és a hibátlan megoldások aránya közötti különbség az f feladatnál nagy, itt fordul elő a legtöbb befejezetlen felsorolás.

Az ismétléses variációk képzésének (ISV) feladatait ugyancsak a megoldások magas színvonala jellemzi, az adatok egyébként is hasonlóak a DSZ feladatainál találtakhoz. Érdekes, hogy az e feladat esetében a befejezetlen felsorolások aránya még nagyobbnak adódik, mint az előző feladatoknál. Az ismétlés nélküli variációk képzésénél (INV) a teljesítmények egyenletesen magas szintet mutatnak. A d feladat kivételével, amelyet a tanulók kb. 50%-a oldott meg hibátlanul, nyolcadik osztályban 60-70% produkál hibátlan megoldást. Az összes ismétléses variáció (ÖIV) képzésének feladatainál a J átlaga ugyancsak a lehetséges maximum 60-70%-át éri el, a hibátlan megoldások aránya azonban itt már elég alacsony.

A "VARIÁLÁS" tesztek feladatairól általában elmondható, hogy a relatív szórás viszonylag alacsony, 20-30% közötti érték.

A "KOMBINÁLÁS" teszt feladatainál némileg megváltozik a kép. Az egyik legfontosabb különbség az lesz, hogy megnő az \bar{x} és a \bar{G} eltérése, ami a felesleges konstrukciók számának megjelenésére utal.

Az ismétléses kombinációk képzésének (ISK) feladatai és az ismétléses permutációk képzésének (ISP) feladatai esetében tapasztaltuk a legmagasabb teljesítményeket. Ez a tapasztalat szemben áll az iskolai kombinatorikatanítás szemléletmódjával: ott a feladatokat a bonyolultabbak között tartják számon. Eredményeink viszont megerősítik azt az alapelvünket, mely szerint egy feladat annál egyszerűbb, minél kevesebb megkötés szerepel a feladatban a konstrukciók elkészítésére vonatkozóan. Az ismétlés nélküli kombinációk képzésének (INK) feladatainál némileg alacsonyabb teljesítményekkel találkozunk, mint amit az ISK feladatainál tapasztaltunk. Például 8. osztályban a 3

konstrukció képzését jelentő *a* feladatokban az ISKa feladat $\bar{J}=0,7$ értékéhez képest az INKa feladatban már csak $\bar{J}=0,52$. Az ugyancsak összehasonlítható ISKe–INKd feladat esetében 0,58-ról csak 0,52-re esik a teljesítmény, míg a 10 db 2 elemű konstrukciót előállító ISKf és az INKc feladatnál a $\bar{J}=0,72$ pontosan megegyezik az ismétléses és az ismétlés nélküli esetben.

Az ismétléses permutációk képzésének feladatainál ugyancsak magas teljesítményekkel találkozunk, mégpedig mindhárom életkorban, ami ugyancsak az iskolai kombinatorikatanítás szemléletmódjának megváltoztatásához szolgáltat érveket, és a kombinatív képesség fejlesztéséhez szolgáltat hasznos támpontokat. E feladatokban a sorrendnek ismét szerepe van, ennek tulajdonítható a viszonylag kevés feleslegesen elkészített konstrukció.

Az összes részhalmoz képzésének (ÖRH) feladatai manipulatív szinten a legnehezebbeknek bizonyultak, a \bar{J} átlagai 0,30 és 0,50 közé esnek.

A "KOMBINÁLÁS" teszt feladatainak többnyire magas, néhány feladatnak (pl.: INK, ÖRH) különösen a fiatalabb mintánál rendkívül magas, 100%-ot is meghaladó a relatív szórása. Ez a polarizálódás azonban stabilnak bizonyul az időben, nem magyarázható tehát pusztán azzal, hogy az adott életkorban gyors fejlődés zajlik.

5.2 A manipulatív feladatok fejlődési folyamatai

A három különböző életkorú minta lehetőséget ad arra, hogy az átfogott életkori periódusban becsüljük a műveletek fejlődésének folyamatait. Rendszerelméleti megfontolások alapján a természetben és a társadalomban megfigyelhető legtöbb korlátos növekedést logisztikus görbével írhatjuk le. A változó növekedése kezdetben lassú, majd a változást leíró görbe egyre meredekebbé válik. A leggyorsabb növekedés inflexiós pontja után a változás aszimptotikusan közelít a korlátnak megfelelő értékhez. Egy populáció valamely mennyiségének időbeli változását követve hasonló S alakú görbét várhatunk. Egy bizonyos időpontban megjelenik a vizsgált tulajdonság, majd mértéke kezdetben lassan, később gyorsan növekszik, végül ismét lassulva közelít a populációra jellemző felső korláthoz. A vizsgált tulajdonságot különböző jellegű változókkal mérhetjük. Például alternatív változót használva követhetjük időben azoknak az arányát, akiknél a tulajdonság már megjelent.

Ha a fejlődés nem pusztán mennyiségi növekedés, hanem azt minőségi átalakulások szakítják meg, vagy a fejlődés folyamata egymást követő minőségi változások, átstrukturálódások sorozataként fogható fel, a populációk statisztikai vizsgálata során lépcsőszerűen egymást követő logisztikus görbék megjelenését várhatjuk. (E kérdéseket bővebben elemzi Feldman-Toulmin, 1976 és Campbell-Richie, 1983.)

Amennyiben feltételezhetjük, hogy a társadalom változásai (illetve a filogenetikus fejlődés) az individumok változásaihoz (tehát az ontogenetikus fejlődéshez) képest elhanyagolhatóak (ezt szigorúan soha nem állíthatjuk), akkor egy populáció körülményes követése helyett különböző életkori keresztmetszeteket használhatunk. Mindig a vizsgálat céljai döntik el, hogy ez a közelítés megengedhető-e. Esetünkben, mivel csak a fejlődés mennyiségi oldalát kívánjuk felvázolni, az életkori metszetek használatát kielégítőnek ítéltük.

Az 5. és 6. táblázatok alapján a fejlődést többféle mennyiség felhasználásával is jellemezhetjük. A legszemléletesebbnek a 100J átlagértékeit találtuk, ezek ugyanis egymással is összehasonlíthatóak. Kevésbé finom megkülönböztetést tenne lehetővé a hibátlan megoldások %-os gyakoriságainak használata, amelyek a durvább jó - nem jó alternatív minősítésen alapulnak.

A 100J értékek változásait szemléltető fejlődési görbéket a 7. és 8. ábrákon mutatjuk be. Mind az életkor, mind pedig a teljesítmény tengelyén lineáris skálát használtunk. Annak érdekében, hogy a görbék alakjának mesterséges torzítását elkerüljük, a vízszintes tengelyen a minták életkori átlagának megfelelő pontokhoz rajzoltuk be a teljesítményszintet. A görbék tehát csak három mért értéket tartalmaznak, az összekötő vonalak csupán közelítő interpolációnak tekinthetők. A görbék néha annyira markánsan jeleznek bizonyos tendenciákat, hogy belőlük jóval a vizsgált intervallumon túlra is extrapolálhatjuk legalábbis a tendenciákat.

A fejlődési görbéket műveletenként (szubtesztenként) csoportosítottuk, egy-egy művelethez tartozó feladatokat ábrázolva egy grafikonon. A nyolc grafikont áttekintve a legfeltűnőbb és legmeglepőbb jelenség az, hogy a vizsgált életkori intervallumban nem tapasztalunk jelentős, például 10%-ot meghaladó fejlődést. A fejlődési görbék általános tulajdonságaként tehát a csekély mértékű változást emelhetjük ki, elemzésünkben ennek lehetséges magyarázatát kell megtalálnunk, illetve a néhány kivételes esetben az ettől az alaphelyzettől való eltérést kell értelmeznünk.

A DSZ, az ISV és az INV feladatai esetében már a tíz éves minta teljesítményei is meghaladják a 70%-ot, a feladatok többségénél a 80, de némely feladatnál a 90%-ot is. Ezek a műveletek tehát manipulatív szinten már igen korán kialakulnak, ezzel meggyarázható, hogy a 10-17 éves életkori szakaszban jelentős fejlődés már nem tapasztalható. A szinte teljesen "vízszintes" futó görbékből arra következtethetünk, hogy e műveletek esetében a fejlődés nagyon korán, valószínűleg a három-tíz éves korban megy végbe.

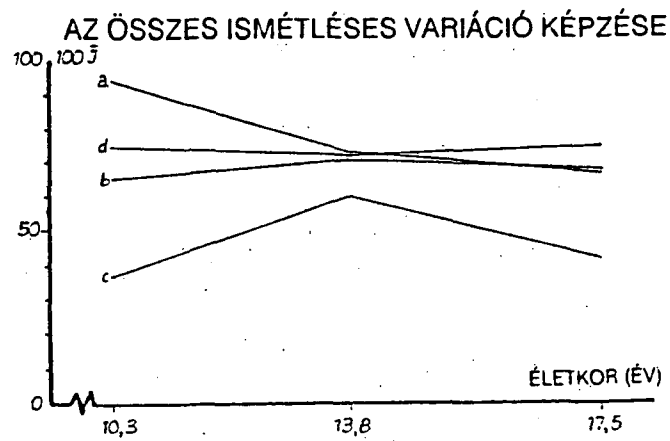
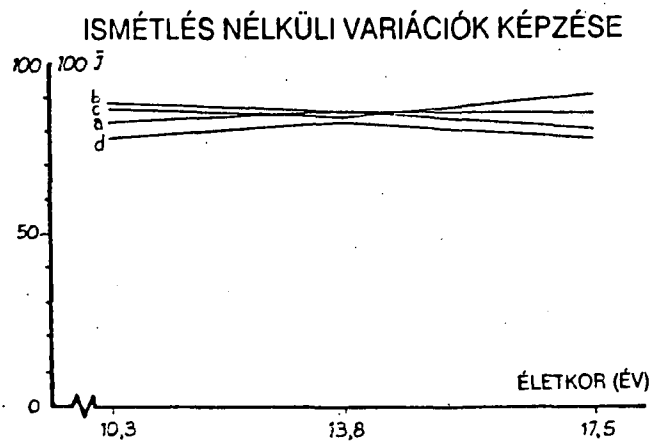
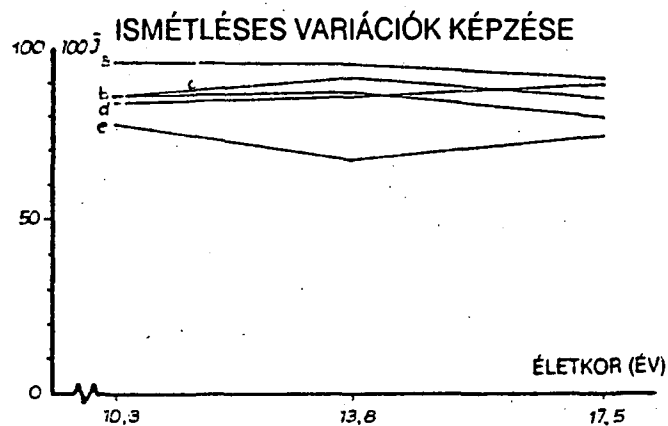
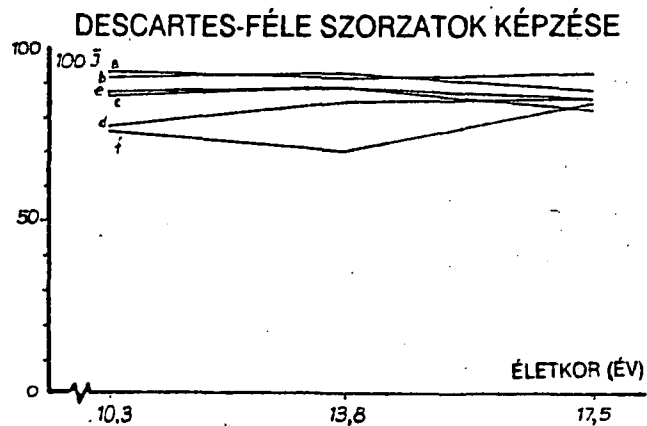
Az előzőekhez hasonló "vízszintes" görbéket találtunk, csak mintegy 20-30 százalékkal alacsonyabb szinten az ismétléses kombinációk és az ismétléses permutációk képzésének feladatainál. Ezeknél a feladatoknál az induló szint alacsonyabb (kivéve az ISPa és ISPb feladatokat), lenne tehát tere a fejlődésnek, mégis a teljesítmények meglepő állandóságát tapasztaljuk. A hét évet átfogó életkori intervallumban alig fordul elő 5%-ot meghaladó változás.

A fejlődés tehát tíz éves korban lényegében itt is befejeződik, de a populáció egy alacsonyabb szinten éri el a fejlődési görbe "telítődési szakaszát". Az adatokat kissé alaposabban megvizsgálva a 6. táblázatból azt is kideríthetjük, hogy az a csekély fejlődés, ami e feladatoknál tapasztalható, a hibátlan megoldások arányának megnövekedéséből származik. Sőt, némelyik feladatnál a hibátlan feladatok arányának növekedése nagyobb fejlődésnek is magyarázatul szolgálhatna a \bar{J} értékek tekintetében. Hogy ez a \bar{J} értékekben nem tükröződik, az csak úgy lehetséges, ha ezt a gyengébb teljesítmények romlása kompenzálja. Vagyis a 17 éves minta néhány százalékkal jobb eredményei mögött a teljesítmények polarizáltsága húzódik meg. Jól szemlélteti e polarizálódást az ISK feladatainál a 10 és a 17 éves minta szórásainak összehasonlítása: 17 éves korban a szórások jóval magasabbak.

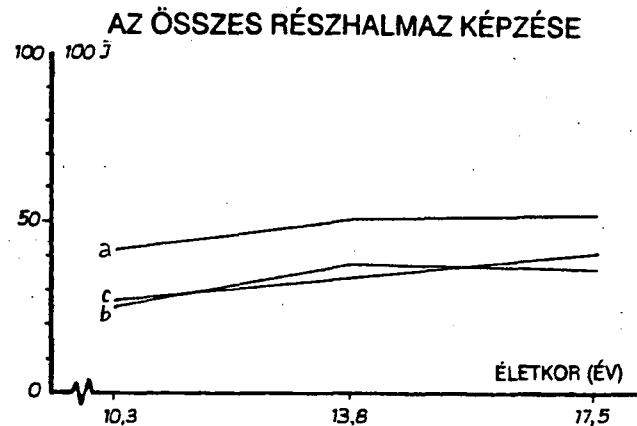
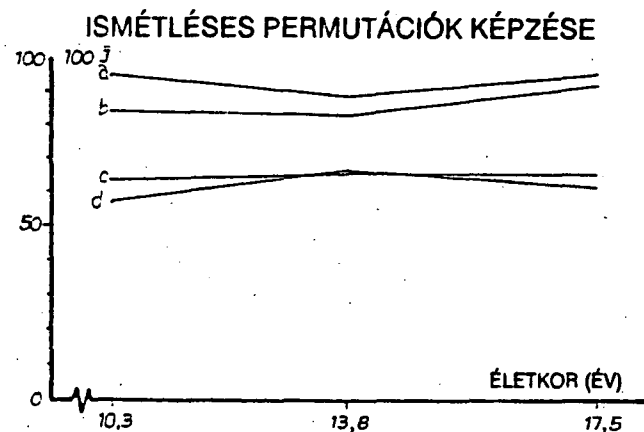
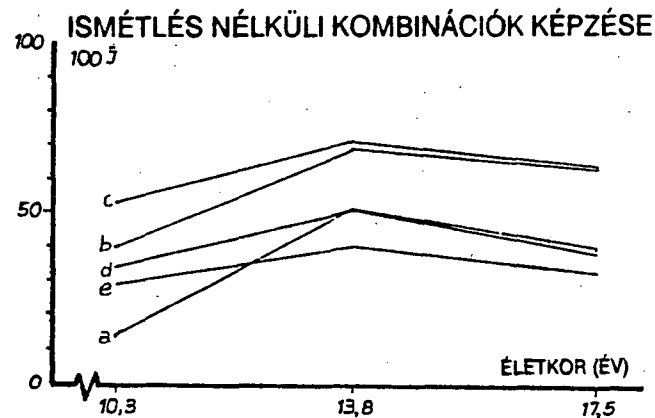
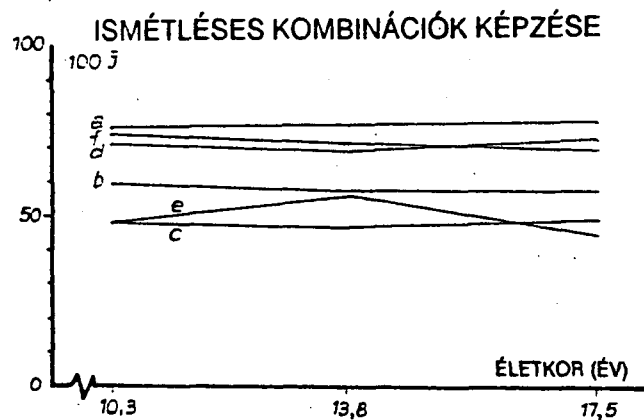
A legalacsonyabb teljesítményeket az ÖRH feladatainál kaptuk – mindhárom életkorban. Az *a* és *b* feladat görbéjének törése megfelel egy logisztikus görbe telítődési szakaszának, a *c* feladat görbéje nem sugallja ennyire a lezárt-ságot. Érdemes megjegyezni, hogy a *c* feladat felel meg annak a háló-struktúrának, amelyet Piaget oly részletesen vizsgál, és amelynek a logikai műveletek egységgé szerveződésében olyan nagy szerepet tulajdonít. E feladatok esetében a legérdekesebb és a legfeltűnőbb a fejlődés hiánya. A teljesítmények átlaga mindhárom feladatnál 50% alatti értéken stabilizálódik.

A fejlődési görbék meglehetősen különös alakja miatt a végére hagyunk két művelet, az összes ismétléses variáció és az ismétlés nélküli kombinációk képzésének feladatait. Az ÖIV feladatainál az *a* feladat görbéje kismértékű egyenletes csökkenést, a *b* és *d* feladaté közel állandó teljesítményt, míg a *c* feladaté növekedést, majd csökkenést jelez. Az ÖIVa feladat görbéjéhez hasonlóan növekedést, majd csökkenést jelez az INK mind az öt feladata. A görbék e különös viselkedésére nehéz magyarázatot találni. Kezdetben mérési hibára gyanakodtunk, ezért végiggondoltuk az összes lehetséges hibaforrást. Nem okozhatja például az eltérést a minták különbözősége. A nyolcadikosok mintája ugyanis minden feladatnál ugyanaz volt, a 10 és 17 éves minták pedig e két kritikusan viselkedő szubteszt esetében nem egyeztek meg, mindegyik közös volt azonban valamelyik korábban elemzett, "normálisan viselkedő" szubteszt mintájával. Egy szubtesztet pedig mindig egyazon minta oldott meg, mégpedig ugyanazon a foglalkozáson, így tehát mintabeli különbségek nem lehetnek a vázolt anomáliák okozói. A görbék sajátos alakjának magyarázatául csak a feladatok struktúrájának és az életkori különbségeknek a kölcsönhatásain alapuló megfontolások szolgálhatnak.

A jellegzetes fordított V betű alakú görbéket mutató feladatokban, mint amilyenek az INK feladatai, az ÖIVa feladat és a még ugyancsak ide sorolható ISKe feladat, semmi más közös vonást nem találunk, mint hogy mindegyik a nehezebb feladatok közé tartozik. A nehézséget jellemezhetjük azzal, hogy a 10 évesek teljesítményei az 50%-os szint alatt vannak. Ezt a magyarázó elvet



7. ábra
A manipulatív feladatok fejlődési görbéi



8. ábra

A manipulatív feladatok fejlődési görbéi

erősíti, bár kevésbé erős "töréssel" az ISP két nehezebb feladata (c és d), valamint az ÖRHb feladat is.

Még egy érdekes anomáliát érdemes megvizsgálnunk, mégpedig a DSZf és az ISVe feladatok V alakú fejlődési görbéit. Ezeket az jellemzi, hogy a 10 és a 17 éves tanulók magas teljesítményei mellett a nyolcadikosok teljesítményei alacsonyabbak. Itt tehát a "rendellenesség" éppen fordított irányú, mint az előzőekben elemzett feladatoknál. Mi a közös e két feladatban? A két feladat struktúráját megvizsgálva azonnal kitűnnek a közös vonások: mindkettő négyelemű konstrukciók előállítását követeli meg, mégpedig egyaránt 16-ot. A két feladat struktúráját tekintve nem különbözik egymástól: ha a DSZf feladatban a kiinduló elemeknek mind a négy halmazát az első halmazzal (A,B) helyettesítjük, az ISVe feladatot kapjuk. Az adott feladatsorozatban mindkét feladat a legnehezebb, de itt, ellentétben az előzőekben elemzett anomáliákkal, a nehézségnek strukturális okai vannak. Mint majd később részletesen kifejtjük, a feladat annál nehezebb, minél hosszabb konstrukciók előállítását igényli. Megerősíti még e gondolatmenetet az ISKc feladat, amely ugyancsak négyelemű konstrukciók képzését jelenti, a szubteszten belül a legnehezebbnek bizonyult, és szintén enyhe V alakú fejlődési görbét mutat.

A fejlődési anomáliákat illetően tehát találtunk néhány strukturális kapcsolatot. Adataink nem adnak azonban magyarázatot arra, hogy a négyelemű konstrukciók képzése miért éppen a nyolcadik osztályban bizonyult a legnehezebbnek, és miért tapasztalunk éppen ellentétes irányú eltérést, ha a feladat nehézségének nem a konstrukciók hosszúsága az oka.

A manipulatív teszteken nyújtott teljesítmények fejlődését összefoglalóan úgy jellemezhetjük, hogy a 10 és 17 éves kor között lényeges fejlődésről nem beszélhetünk. A nehezebb feladatok fejlődési görbéi bizonyos rendellenességeket mutatnak, a legnehezebb feladatoknál 10 és 14 éves kor között az átlagosnál nagyobb a fejlődés, ezt azonban 14 és 17 év között többnyire visszaesés követi. A visszaesés okait illetően nem rendelkezünk kielégítő magyarázattal. Feltehető, hogy a kognitív fejlődésen kívülálló, illetve modellünk keretei között nem értelmezhető kognitív tényezők is szerepet játszanak. Nem magyarázható azonban a rendelkezésre álló adatok alapján, hogy e tényezők miért az elemzett specifikus módon hatnak.

5.3 A manipulatív szubtesztek eredményei

Egy-egy kombinatív művelethez, amint ezt már korábban részletesen bemutattuk, több számértékben különböző feladatot készítettünk, e feladatok szubteszteket alkotnak. Ahhoz, hogy a műveletek fejlettségének mértékét megítélhessük, e szubtesztek összevont mutatóira van szükségünk. A szubtesztek összevont mutatóját a 4.3 pontban kifejtett megfontolások alapján a fel-

adatok jóságának súlyozott mutatójából, a feladatokhoz tartozó G értékekből egyszerű összegzéssel készítettük el.

A manipulatív szubtesztek összevont mutatóinak eloszlásait a 8. osztályos minta eredményei alapján a 9. és a 10. ábrákon mutatjuk be. A diagramokon feltüntettük a szubtesztek átlagát és relatív szórását is.

A DSZ, az ISV és az INV szubtesztek eredményeinek eloszlása erősen jobbra aszimmetrikus, jelezve, hogy a műveletek fejlettsége igen magas szintet ér el. Az átlagok a lehetséges maximumnak sorrendben a 84, a 83, illetve a 85%-át érik el. A viszonylag alacsony, 20% körüli relatív szórások jelzik a teljesítmények kiegyenlítetttségét. Az alacsony pontszámokhoz tartozó kis gyakorisági értékek is bizonyítják, hogy e műveletek 14 éves korra szinte minden tanulónál magas szinten kifejlődnek.

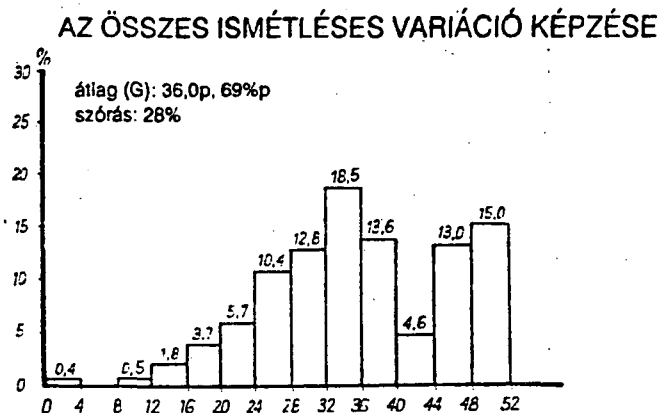
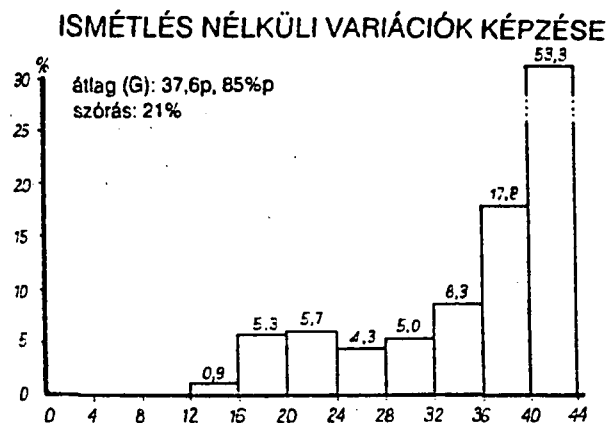
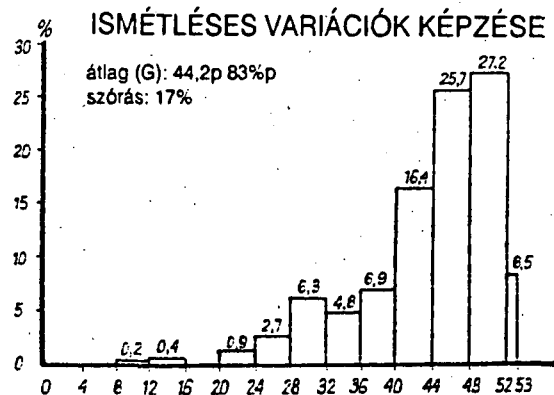
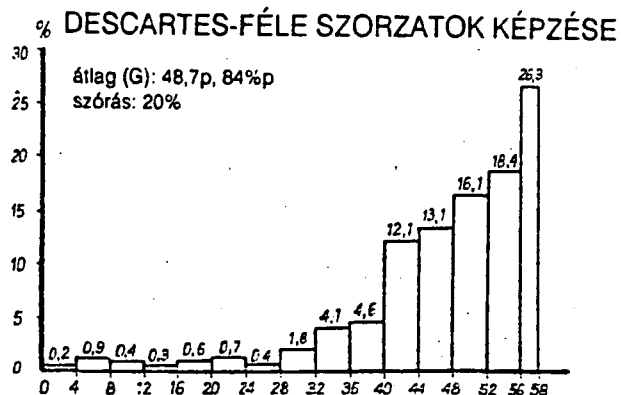
Az ÖIV, az ISK és az ISP szubtesztjei a 69, 64, illetve 73%-os átlaggal a műveletek kétharmadnyi-háromnegyednyi fejlettségét jelzik. Az eloszlások az átlagoknak megfelelően jobbra enyhén aszimmetrikusak. A 30% körüli relatív szórások már az előzőnél nagyobb polarizáltságot jeleznek.

Az INK az 56%-os átlaggal, 43%-os relatív szórással a középmezőnyt képviseli. Az eloszlás szimmetrikus, lapos normális eloszláshoz közelít. Végül az ÖRH szubteszt a 38%-os átlaggal a legfejletlenebb művelet eredményeit dokumentálja. Az eloszlás U alakú. A tanulók több mint 50%-a még 4 pontot sem ért el, ugyanakkor mintegy 20%-uk a maximumot is erősen megközelíti. A 100%-os relatív szórás szintén a teljesítmények nagymértékű polarizációját jelzi. Ismét emlékeztetünk arra, hogy az összes részhalmoz képzése a Piaget által kiemelt struktúrák egyikét, a hálót képviseli, és e feladatokat a tanulóknak 14 éves korban Piaget elmélete és kísérletei szerint meg kellene oldaniuk.

A manipulatív szubtesztek eredményei lényegében megerősítik, vagy legalábbis nem mondanak ellent a kombinatív műveleti képesség struktúrájára vonatkozó hipotéziseinknek. A DSZ, az ISV és az INV műveletei kétségtelenül a legmagasabb szinten kialakuló műveletek. Az ÖIV összetettsége miatt csak követi ezeket. Ami a "KOMBINÁLÁS" teszt műveleteit illeti, itt is az ISP lóg ki a hipotézisben felvázolt képből, az ISK, INK és ÖRH csökkenő teljesítményei a hipotézisnek megfelelnek.

5.4 A manipulatív teljesítmények összefüggésvizsgálata

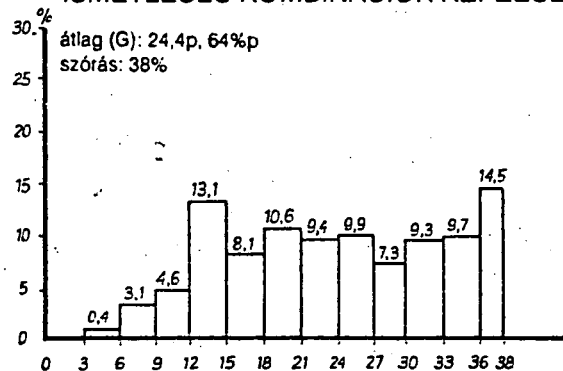
Az összefüggésvizsgálatokhoz kiindulásként a korrelációs együtthatókat használtuk fel. A feladatok közötti korrelációs együtthatók számításához a megoldás jóságát jellemző súlyozott mutatót (G) használtuk, a szubtesztek, tesztek, az azonos tartalmú feladatok összpontszámai és a képesség korrelációihoz pedig a megfelelő feladatok G értékeinek összegzésével előállított változót. Így a $3 \times 37 = 111$ feladatból, $3 \times 8 = 24$ szubtesztből, hat tesztből, a három



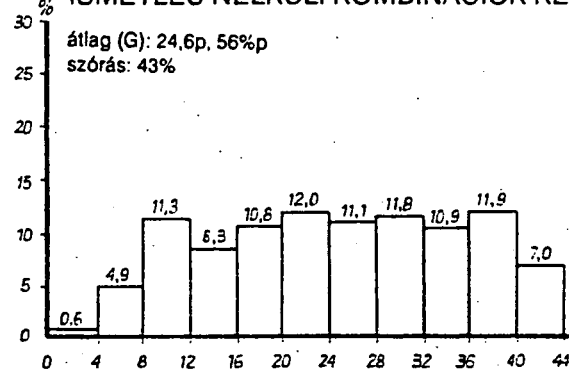
9. ábra

A manipulatív szubtesztek eloszlásai

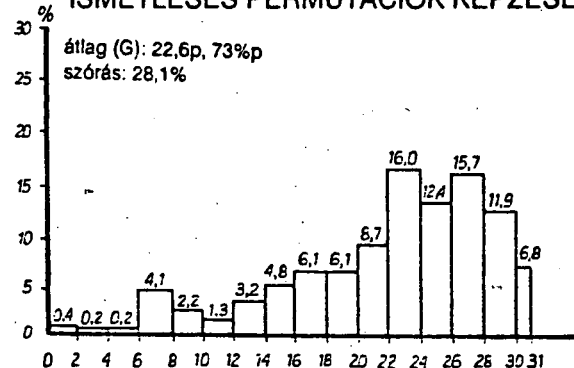
ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓK KÉPZÉSE



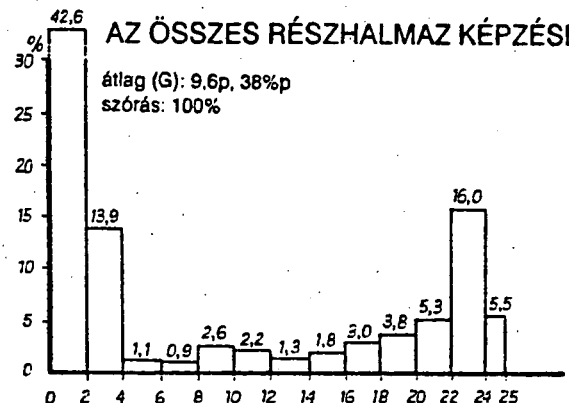
ISMÉTLÉS NÉLKÜLI KOMBINÁCIÓK KÉPZÉSE



ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓK KÉPZÉSE



AZ ÖSSZES RÉSZHALMAZ KÉPZÉSE



10. ábra

A manipulatív szubtesztok eloszlásai

tartalomindexből (az azonos tartalmú feladatok összpontszámából) és a teljes kombinatív művelleti képességet jellemző változóból álló változórendszerre, azaz összesen az így előállított 145 változóra számítottuk ki a teljes korrelációs mátrixot. A mátrix 10 440 korrelációs együtthatója reprezentálja a kombinatív művelleti képesség belső összefüggésrendszerét.

A korrelációs együtthatók bizonyos részmatrixait felhasználva klaszteranalízist végeztünk, ezáltal elemzéseinkhez magukat a korrelációs együtthatókat, illetve a klaszteranalízis eredményeként kapott gráfokat használhatjuk fel.

Terjedelmi okok miatt e korrelációs együtthatóknak csak egy kis hányadát közölhetjük. A szintek belső összefüggéseinek elemzéséhez felhasználandó együtthatók leggazdaságosabb kiválasztási módja az lehet, ha a feladatrendszer hierarchikus tagozódását követve megadjuk a szubtesztek korrelációs mátrixait, a feladatoknak a megfelelő szint szubtesztjeinek összevont mutatójával való összefüggéseit, a feladat-tartalomindex, valamint a feladat-kombinatív képesség korrelációs együtthatókat.

A manipulatív tartalmú szubtesztek interkorrelációs mátrixait, vagyis az egy szubtesztbe tartozó feladatok közötti korrelációs együtthatókat a 7. táblázatban foglaltuk össze.

A táblázatban szereplő legkisebb korrelációs együttható a DSZa és az f feladata között adódott, ez 0,22. Így a táblázat minden adata szignifikáns $p=0,1\%$ -os szinten is ($r_{kr}=0,15$). A legmagasabb értéket 0,92-t az ÖRHb és c feladata között kaptuk.

A DSZ feladatai közötti együtthatók viszonylag alacsonyak, nagy többségük 0,30 és 0,45 közötti értékű. Ez azt jelzi, hogy a feladatok ugyanazt a viszonylag homogén tudást mérik. Az együtthatók között nincsenek olyanok, amelyek arra utalnának, hogy valamelyik feladat tesztelméleti értelemben hibás lenne. Arra, hogy a manipulatív szinten a DSZ feladatai között kaptuk a legalacsonyabb korrelációkat, kielégítő magyarázatul szolgál az e feladatokban nyújtott magas teljesítmény.

Az ISV feladatainak korrelációs együtthatói zömmel 0,30 és 0,50 között vannak, míg az INV esetében többnyire 0,50 és 0,60 közötti, az ÖIV-nél pedig egy kivétellel 0,70 vagy annál nagyobb értékeket kaptunk. A "VARIÁLÁS" teszt szubtesztjére is érvényes tehát az a tesztanalízisből jól ismert jelenség, mely szerint a szórások növekedésével nő a korrelációs együtthatók értéke. Esetünkben mindez a teljesítmények csökkenésével párhuzamosan valósul meg.

Az előző négy szubteszten megfigyelt tendencia lényegében a "KOMBINÁLÁS" négy szubtesztjénél is folytatódik, a teljesítmények még alacsonyabbak, a szórások még nagyobbak, a korrelációs együtthatók még magasabbak. Az ISP magasabb teljesítményei mellett 0,34-0,66-os korrelációs együtthatókat találtunk. Az ISK és az INK feladataiból viszont már csak egy együttható

7. táblázat. A manipulatív szubtesztek belső korrelációi

		a	b	c	d	e
Descartes-féle szorzatok képzése	b	30				
	c	36	46			
	d	31	44	45		
	e	32	38	50	48	
	f	22	26	38	36	35
		a	b	c	d	
Ismétléses variációk képzése	b	31				
	c	35	52			
	d	36	49	54		
	e	27	50	42	53	
		a	b	c		
Ismétlés nélküli variációk képzése	b	49				
	c	53	57			
	d	51	53	72		
		a	b	c		
Az összes ismétléses variáció képzése	b	70				
	c	75	71			
	d	64	72	71		
		a	b	c	d	e
Ismétléses kombinációk képzése	b	53				
	c	56	68			
	d	55	45	62		
	e	51	60	65	66	
	f	54	50	58	71	70
		a	b	c	d	
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	b	57				
	c	55	67			
	d	57	55	65		
	e	53	50	56	72	
		a	b	c		
Ismétléses permutációk képzése	b	44				
	c	37	53			
	d	34	48	66		
		a	b			
Az összes részhalmaz képzése	b	89				
	c	83	92			

Megjegyzés: A táblázatban helykímélés érdekében a 0-át és a tizedesvesszőt elhagytuk.

maradt 0,50 alatt, az ÖRH három korrelációja pedig extrém magas: $r_{ab}=0,89$, $r_{ac}=0,83$ és $r_{bc}=0,92$.

A magas korrelációkat természetesen nem magyarázza az, hogy a teljesítmény a szubteszteknél már inkább csak közepes, azok valóban a különböző feladatokban nyújtott teljesítmények szoros együttjárását fejezik ki. Ennek oka pedig az egy művelethez való tartozás, a struktúra hasonlósága.

E következtetésünket megerősíti, hogy a manipulatív szint teljes (itt nem közölt) korrelációs mátrixában nem találtunk az előzőekhez hasonlóan magas együttthatókat. Szignifikánsan negatív értékek sem fordultak elő, az együttthatók többsége szignifikáns, de alacsony vagy közepes nagyságú.

Ugyanezeket a tendenciákat szemlélteti, bár kevésbé "finom" felbontásban, a 37 manipulatív feladatnak a manipulatív szubtesztek mutatóival való korrelációja. Ezeket a 8. táblázat tartalmazza. Itt már korántsem szignifikáns minden együtttható, sőt egy 0,00 (azaz 0,005-nél kisebb) érték is előfordul. A legszorosabb korrelációkat természetesen a feladatok "saját" szubtesztjeikkel mutatják (ld. a bekeretezett oszlopokat). Egyszerűen magyarázható az is, hogy a nehezebb feladatok korrelációi általában magasabbak.

Van azonban ezeken túl is néhány érdekesen magas korrelációsorozat. Ilyenek például az ÖIV feladatoknak az ÖRH szubteszttel (és megfordítva: az ÖRH feladatoknak az ÖIV szubteszttel) való összefüggései. A kapcsolatok strukturális magyarázata az lehet, hogy mindkét szubteszt feladataiban különböző hosszúságú konstrukciókat kell képezni. Meglepő viszont, hogy hasonlóképpen szoros a kapcsolat az ÖRH-ISK feladatok ill. szubtesztek között. Ebben az a különös, hogy a strukturális szempontok alapján az ÖRH-INK összefüggésnek kellett volna szorosabbnak adódnia, mivel az összes részhalmaz képzése lényegében nem más, mint az összes különböző elemszámú ismétlés nélküli kombináció képzése.

A feladatok és a manipulatív tartalom összesített mutatója közötti korrelációk mindegyike szignifikáns 0,01%-os szinten is. Ezek az együttthatók magasabbak, mint amit a szubtesztekkel kapcsolatban tapasztaltunk. Legmagasabb az ÖIV_c feladatának esetében, de hasonlóképpen magas a *d* és az ÖRH mindhárom feladatánál. Itt is érvényesül az a tendencia, hogy egy szubteszten belül a bonyolultabb (hosszabb konstrukciókat előállító) feladatok korrelációi magasabbak. A magas feladat-manipulatív tartalom korrelációk arra engednek következtetni, hogy néhány feladatot felhasználva lehetne olyan tesztet szerkeszteni, amellyel a manipulatív tartalmú feladatok megoldásának képességét nagy megbízhatósággal mérhetjük.

Az előzőeknél valamivel alacsonyabbak a feladatoknak a teljes kombinatív műveleti képességgel (az összes feladatból készített mutatóval) való korrelációi, bár 1%-os szinten valamennyi szignifikáns (ld. a 8. táblázat utolsó oszlopát).

8. táblázat. A manipulatív feladatok korrelációi

Feladat		Manipulatív szubtesztek								M	Kombinatív képesség
		DSZ	ISV	INV	ÖIV	ISK	INK	ISP	ÖRII		
Descartes-féle szorzatok képzése	a	47	19	14	12	22	21	14	13	31	12
	b	58	30	23	16	16	11	16	17	35	19
	c	74	37	22	24	27	26	25	21	49	31
	d	70	28	21	26	24	22	22	22	45	29
	e	72	29	15	29	33	32	29	25	51	27
	f	78	27	21	26	40	32	24	21	51	33
Ismétléses variációk képzése	a	27	46	35	11	08	04	13	04	26	19
	b	28	71	52	20	10	06	23	11	39	23
	c	24	71	45	15	10	04	25	09	35	21
	d	36	85	53	27	15	15	36	15	51	32
	e	35	84	51	28	24	23	38	22	55	32
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	13	41	68	15	11	02	22	13	32	24
	b	11	48	71	09	06	03	16	02	28	16
	c	22	56	88	15	11	07	27	09	40	21
	d	32	63	93	18	11	09	36	08	47	24
Az összes ismétléses variáció képzése	a	23	17	09	82	44	37	34	55	60	39
	b	30	26	15	87	44	35	37	50	64	41
	c	31	26	17	90	51	44	38	60	71	44
	d	32	32	20	91	49	39	43	54	70	44
Ismétléses kombinációk képzése	a	30	20	10	44	68	43	34	52	58	37
	b	23	12	10	37	73	39	21	53	53	30
	c	30	18	11	38	82	44	19	60	60	29
	d	36	20	09	48	83	51	29	56	65	36
	e	35	17	11	48	89	49	27	59	66	35
	f	36	17	08	47	87	48	28	56	65	35
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	29	04	00	35	48	72	27	41	51	27
	b	30	11	01	31	47	76	18	39	51	26
	c	41	20	06	41	51	83	36	40	63	37
	d	33	18	11	37	44	87	41	34	60	34
	e	24	14	09	36	44	86	32	39	56	32
Ismétléses permutációk képzése	a	05	08	10	21	17	16	53	10	24	17
	b	26	25	27	30	27	25	72	18	44	27
	c	31	39	32	40	26	33	91	19	55	33
	d	29	38	29	39	26	39	86	17	54	34
Az összes részhalmoz képzése	a	35	20	12	62	64	47	24	89	70	37
	b	32	18	08	59	68	47	21	97	70	33
	c	26	19	10	61	66	44	20	99	69	33

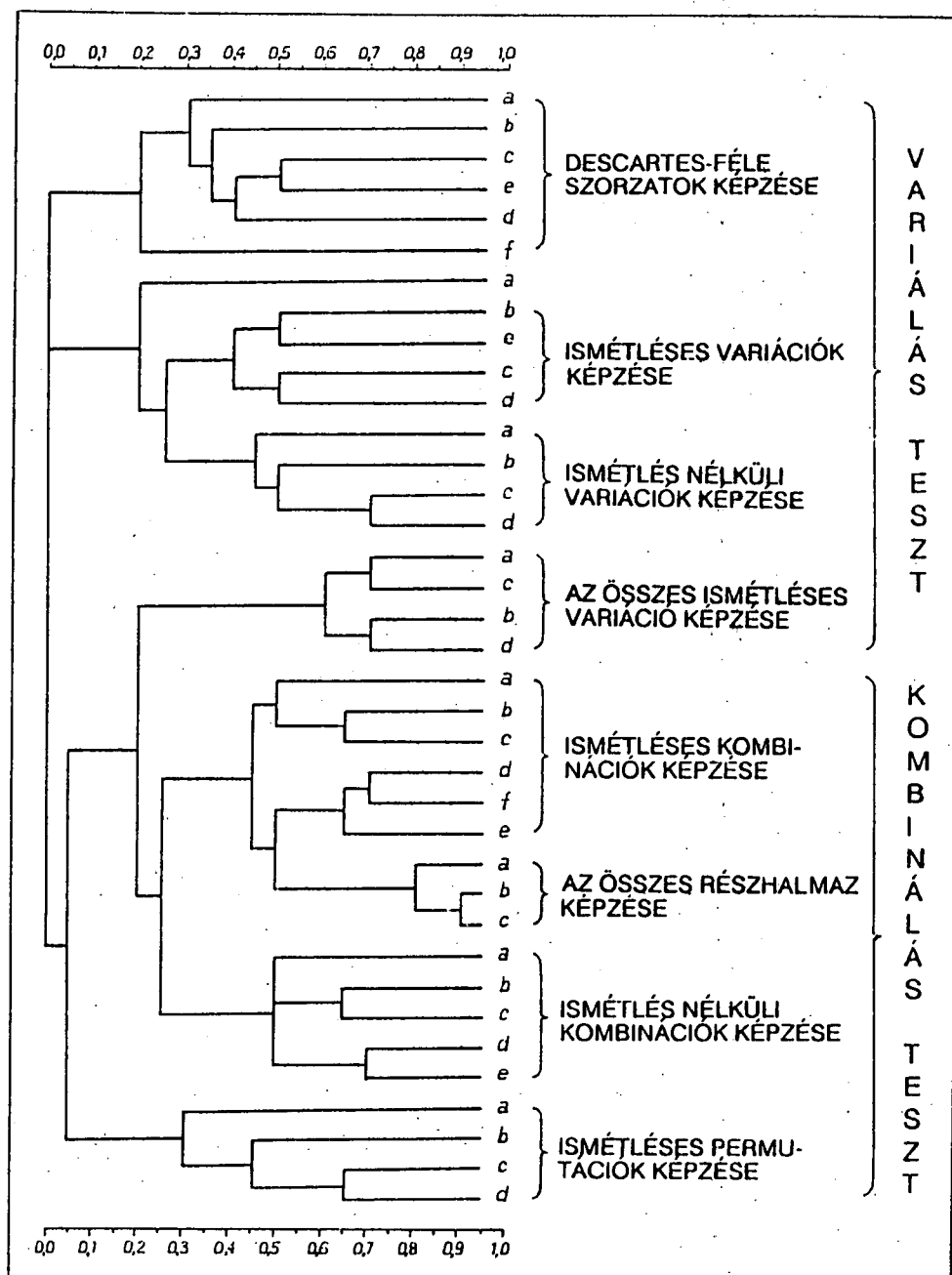
Megjegyzés: Helyikímélés érdekében a táblázatban a 0-át és a tizedesvesszőt elhagytuk.

Érdekes, hogy a kombinatív képességgel a legmagasabb korrelációkat az ÖIV feladatainál találjuk: 0,39; 0,41; 0,44; 0,44. A többi feladatnál a legnagyobb érték 0,37, vagyis egyik sem éri el azt a szintet, mint amit az ÖIV bármelyik feladata. Mi lehet ennek az oka? Miért változik együtt ilyen szorosan e feladatok megoldása a képességindexszel? Az összes ismétléses variáció képzésének feladataiban különböző hosszúságú konstrukciókat kell képezni. E vonásokban eltérnek az összes többi feladattól, kivéve az összes részhalmaz képzésének feladatait. E tulajdonságuknál fogva az egyik legbonyolultabb feladatscsoportot alkotják. Alaposabb elemzéssel kimutatható az is, hogy a műveletvégzést jellemző tulajdonságok (pl.: számít az elemek sorrendje a konstrukciókban vagy nem; azonos-e az összes konstrukció hossza, vagy sem) tekintetében az ÖIV minden más művelettel mutat egy vagy több közös vonást. Más oldalról megközelítve a kérdést, mint azt a kiinduló, hipotetikus rendszer is szemlélteti (1. ábra), az ÖIV a műveletek fejlődési sorának a végén helyezkedik el, akkor jelenik meg, amikor a műveletvégzés legtöbb vonása kialakult.

A magas korrelációk legfőbb magyarázó elvének tehát a komplexitást és a tulajdonságok integrációját tekinthetjük. Állításunkat pontosabban úgy is megfogalmazhatjuk, hogy minél nagyobb a feladat komplexitása, minél több más feladattal közös tulajdonsága van, és minél később jelenik meg a fejlődés során, annál magasabb a korrelációja a kombinatív képesség indexszel. De ha ez a tendencia igaz, akkor megfordítva várhatjuk azt, hogy ha a feladat nem komplex, nem mutat sok más feladattal közös tulajdonságot, és a fejlődési folyamatnak nem a végén helyezkedik el, akkor a teljes kombinatív képességgel alacsonyan fog korrelálni. Statisztikai adatokról lévén szó, természetesen csak e következtetési séma tendenciaszerű érvényesülését várhatjuk. A tapasztalat mindenesetre igazolja következtetésünket. Ennek legszemléletesebb példája a DSZa feladata: a legalacsonyabb korrelációs együttható a legegyszerűbb, más feladattípushoz nem hasonlító, a fejlődési folyamat legelején álló feladatnál található.

A manipulatív tartalmú feladatok kapcsolatait legtömörebben, ugyanakkor mégis nagyon informatív módon a feladatok klaszteranalízisének eredményein keresztül jellemezhetjük. A feladatok hierarchikus osztályozását szemléltető dendrogramot az 11. ábrán mutatjuk be. A klaszteranalízis során a complete linkage módszert alkalmaztuk. Ez, mint ismeretes, az osztályok képződése tekintetében meglehetősen szigorú kritériumokat állít. Az elemeket vagy osztályokat csak akkor egyesíti a hierarchia magasabb szintjén közös osztályba, ha az új osztály minden eleme között fennáll legalább a hierarchia megfelelő szintjéhez tartozó szorosságú kapcsolat.

A hierarchiában az egésztől a rész felé haladva elsőként azt állapíthatjuk meg, hogy a manipulatív feladatrendszer három össze nem függő osztályra esik szét. Külön osztályt alkotnak a DSZ feladatai. Független közös osztályt képeznek az ismétléses és az ismétlés nélküli variációk. A harmadik osztályba pedig



11. ábra
A manipulatív feladatok klaszteranalízise

az összes ismétléses variáció képzésének és a "KOMBINÁLÁS" teszt négy szubtesztjének feladatai tartoznak. Korábbi elemzéseink alapján a DSZ feladatainak elkülönülése nem meglepő. (Csupán ebben az egy műveletben szerepelnek kiindulásként több halmaz elemei, magas a teljesítményszint stb.)

Az ISV és INV feladatainak összekapcsolódását magyarázhatja az is, hogy mindkét feladatban variációkat kell képezni. Az INV feladatai zárt halmazt alkotnak, ehhez kapcsolódik az ISV *b*, *e*, *c* és *d* feladata, majd az egész csoport-hoz legalább kötődik az ISV *a* feladat.

A harmadik önálló osztály leggyengébben kapcsolódó részhalmazát az egymás között viszonylag szorosan összefüggő ISP feladatai alkotják. Különállásuk egyik magyarázata lehet az, hogy *e* feladatok konstrukcióiban számít az elemek sorrendje. A másik négy szubtesztből álló osztály további két részre bomlik. Az egyiket az ÖIV feladatai, a másikat a különböző kombinációk képzését jelentő ISK, INK és ÖRH feladatok alkotják.

Az összes ismétléses variáció képzésének feladatai már produkáltak egy különös jelenséget, a teljes kombinatív műveleti képességgel való kiemelkedően magas korrelációt. Itt ismét különös módon viselkednek. A teljes hierarchiában ez az egyetlen szubteszt, amelyik nem a kiinduló hipotetikus rendszernek megfelelő helyen található, azaz szorosabban kapcsolódik a "KOMBINÁLÁS" teszthez, mint a "VARIÁLÁS" szubtesztjeihez.

Az ISK az ÖRH és az INK közös osztályba sorolásának oka lehet, mint már említettük, hogy mindegyikben a kombinációk képzésének valamilyen formájáról van szó. Ezen belül az ISK és az ÖRH feladatai önálló zárt halmazt alkotnak. Az ISK feladatai viszont két részre törnek, a *d*, az *e* és az *f* feladatokból álló csoport az ÖRH szubteszthez kapcsolódik, és csak a nagyobb csoporttal mutatnak lazább összefüggést az *a*, *b* és *c* feladatok.

Összegzésként megállapítható, hogy a hierarchia alapszerkezete – egy művelet helyét kivéve – megfelel a hipotetikus struktúrának; a kapcsolatok szintje, szorossága pedig tovább finomítja a kiindulásként felvázolt képet. Érdekes lenne a hierarchia alsóbb szintjeivel, a szubtesztek belső tagozódásával is foglalkozni, erről azonban itt a terjedelmi korlátok miatt le kell mondanunk.

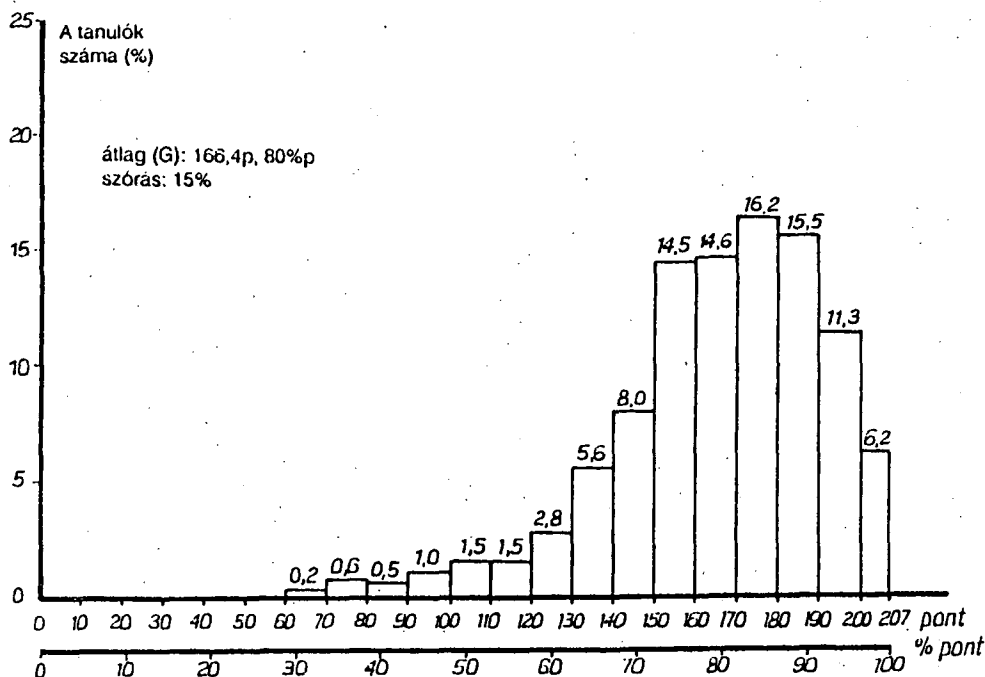
A szubtesztek belső szerkezetének néhány lényeges vonásával korrelációs mátrixaik elemzése során már foglalkoztunk. További érdekes megfigyeléseket lehet tenni a feladatok 2. és 3. táblázatban bemutatott struktúrájának, a hasonlóságoknak és különbségeknek, valamint a klaszteranalízis eredményeként kapott kapcsolatrendszernek az összehasonlítása révén.

5.5 A manipulatív teljesítmények összefoglaló jellemzése

Annak legfőbb jellemzésére, hogy milyen fejlettségi szintet ér el a kombinatív művelési képesség 14 éves korban, a feladatok G értékeinek összegzésével előállított mutató alkalmas.

Mivel technikai szempontokon és elméleti megfontolásokon túl bizonyos tapasztalati adatok is utalnak arra, hogy a "VARIÁLÁS" és a "KOMBINÁLÁS" teszteken elért teljesítmények között lényeges különbség van, célszerű e tesztek teljesítményeinek eloszlását külön-külön is megvizsgálnunk (12. és 13. ábra).

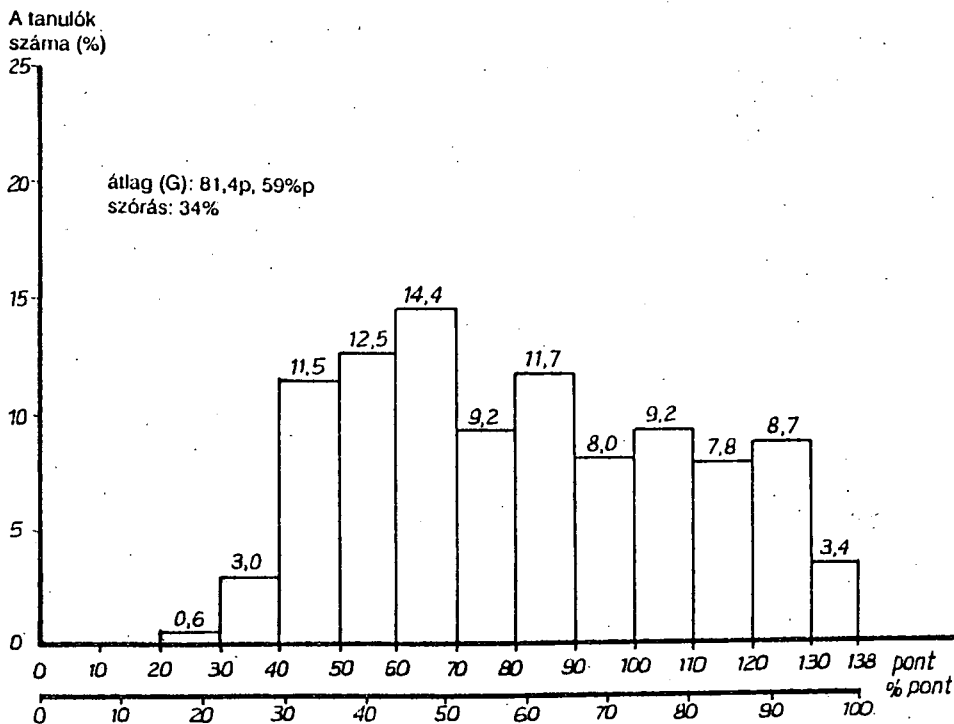
A "VARIÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása jobbra aszimmetrikus, átlaga 80,3% pont. A relatív szórás alacsony (15%), jelezve, hogy a populációban nincsenek szélsőséges különbségek. 30% alatti teljesítmény nem fordult elő, 60% alatt is csak a tanulók mintegy 8%-a teljesített. A teljesítményskála legmagasabb értéke 207 pont. Ezt az a tanuló éri el, aki a feladatokban mind a



12. ábra

A manipulatív "VARIÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása

207 különböző konstrukciót felsorolja, és egyet sem ír fel feleslegesen, többször. Mintánkban (ez az ábráról nem olvasható le) 5 ilyen tanuló (0,9%) fordult elő, ők tehát a "VARIÁLÁS" teszt összes feladatát megoldva sehol sem hibáztak. Ehhez természetesen a megfelelő műveletek teljes fejlettségén túl rendkívüli figyelem és kitartás is kell.



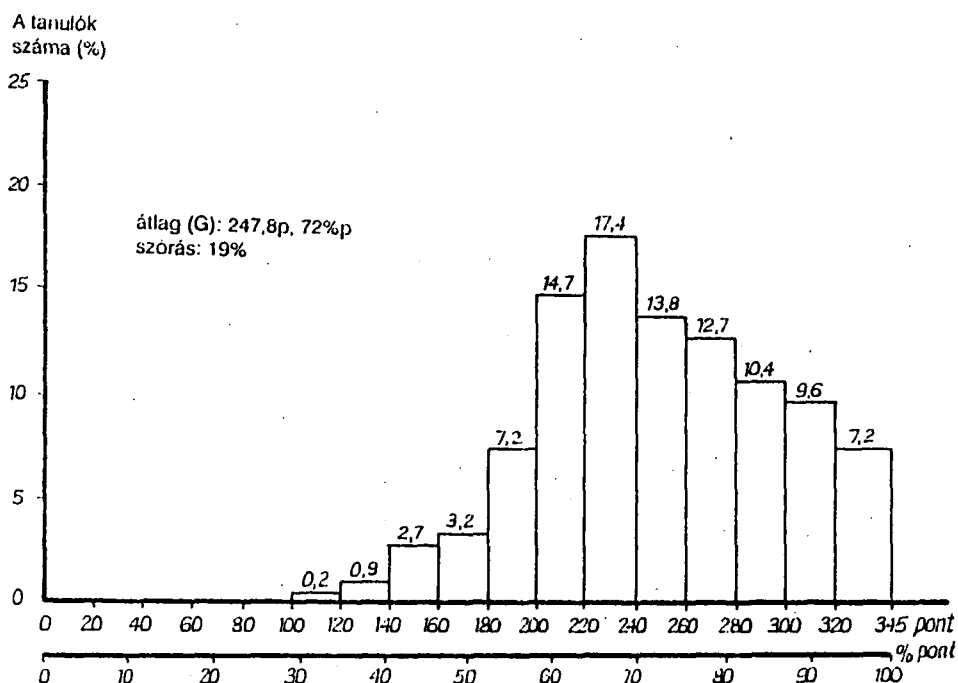
13. ábra
A manipulatív "KOMBINÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása

A "KOMBINÁLÁS" teszt teljesítményei már sokkal kevésbé homogének. Az átlag 59%p, a relatív szórás pedig a "VARIÁLÁS" tesztének több mint kétszerese. Az eloszlás erősen lapult, módusza 50% alatt van. E tesztben összefogott műveletek együttes fejlettsége tehát az előzőeket nem éri el, közöttük mintegy 20%-nyi különbség van. Teljesen hibátlan tesztmegoldás itt nem fordult elő.

A összes (37) manipulatív feladattól képzett mutató eloszlását a 13. ábrán mutatjuk be. A teljesítményskála legmagasabb értéke 345 pont, ami ugyanannyi hibátlan konstrukció felsorolását jelenti. Ilyen megoldás mintánkban (a "KOMBINÁLÁS" teszt hibátlan megoldásának hiányában) természetesen nem

volt. A legjobb eredmény 341 p (99%), ami még mindig igen figyelemreméltó. A nyolcadikos mintában nem volt olyan tanuló sem, aki legalább 100 hibátlan konstrukciót (a maximum közel harmada) elő ne állított volna, és a tanulók kevesebb, mint 6%-a nyújtott 50% alatti teljesítményt.

A manipulatív szint átlaga 72%p, relatív szórása 19%. Összességében tehát a kombinatív képesség manipulatív tartalmú feladatokban 14 éves korra a tanulók nagyobb hányadánál már működőképes.



14. ábra
A manipulatív teljesítmények eloszlása

6. KÉPI TARTALOM

6.1 A képi feladatok teljesítményei

Amint azt a 3.1 részben bővebben kifejtettük, a különböző tartalmú feladatok struktúrája egymással tökéletesen megegyezik. Ezért az eredmények elemzése során is azonos gondolatmenetet követhetünk. A képi tartalmú feladatok adatait az 5. fejezetben már megismert módon mutatjuk be, ezért az adatok kiszámítási módjának, illetve jelentésének kifejtésétől itt eltekinthetünk.

A képi feladatok eredményeit a 9. és a 10. táblázat tartalmazza, párhuzamosan a három korosztály adatait, a korábban már megismert módon. Elemzéseinkhez itt is elsősorban a 14 éves korosztály eredményeit fogjuk felhasználni, bár a két másik minta mint két további, független vizsgálat alkalmas megállapításaink pontosítására, ellenőrzésére.

A képi feladatok megoldása többnyire magas színvonalú, átlagosan a 70% körül mozog. Többnyire nem éri el a manipulatív feladatokban nyújtott teljesítményértékeket, bár e tendencia alól néhány művelet feladatai kivételt képeznek.

A legjobb eredményeket képi tartalommal is a DSZ feladatainál érték el a tanulók. Kiemelkedően magas, 80% feletti az *a*, *b*, *c* és *e* feladat eredménye, és ezektől jelentősen lemarad a *d* és az *f* feladat. Teljesen hasonló a helyzet (a teljesítményértékek némi eltolódása mellett) a másik két korosztálynál is. Ha a két csoport között strukturális különbséget keresünk, ezt nagyon könnyű megtalálnunk: az *a*, *b*, *c* és *e* feladatokban két elemből álló konstrukciókat kell előállítani, míg a *d* feladatban három, az *f* feladatban pedig négy elemből álló konstrukciók képzéséről van szó. A feladatok szórása 40% körül van, tehát a teljesítmények szélesebb skálán ingadoznak, mint a manipulatív feladatok teljesítményei.

Még mindig magas, 0,8 körüli \bar{J} értékeket találunk az ISV feladatainál is. A két legalacsonyabb teljesítményt (*b* és *e* feladat) itt is a kettőnél több (három és négy) elemű konstrukciókat képző feladatoknál találtuk. Különösen

9. táblázat. A képi "VARIÁLÁS" teszt feladatainak eredményei

Feladat		T	10 évesek						14 évesek						17 évesek					
			\bar{x}	CV _X %	\bar{G}	CV _J %	$100\bar{J}$	J=1 %	\bar{x}	CV _X %	\bar{G}	CV _J %	$100\bar{J}$	J=1 %	\bar{x}	CV _X %	\bar{G}	CV _J %	$100\bar{J}$	J=1 %
Descartes-féle szorzatok képzése	a	4	3,56	27	3,18	40	80	64,5	3,54	31	3,34	37	83	72,9	3,54	31	3,35	36	84	72,2
	b	6	5,29	27	4,74	37	79	53,2	5,20	32	4,93	37	82	66,3	5,43	28	5,19	31	87	72,2
	c	12	10,19	28	8,99	41	75	46,8	10,15	33	9,58	39	80	58,4	10,64	30	10,18	35	85	68,7
	d	8	5,26	46	4,74	51	59	22,7	5,65	45	5,35	49	66	37,1	6,15	41	5,92	43	74	47,8
	e	12	10,10	30	9,06	42	76	48,9	10,36	32	9,87	36	82	62,9	10,59	31	10,28	35	86	69,6
	f	16	10,06	35	8,59	43	54	4,3	10,02	51	9,33	55	58	16,9	11,22	43	10,48	48	66	25,2
Ismétléses variációk képzése	a	4	3,75	19	3,52	31	88	80,0	3,47	33	3,32	40	83	76,6	3,87	11	3,70	23	93	85,8
	b	8	6,60	26	6,25	30	78	37,0	6,16	40	5,91	44	73	44,6	7,26	19	7,09	21	89	62,5
	c	9	8,11	20	7,54	29	84	57,8	7,41	36	7,07	41	79	58,0	8,51	15	8,19	21	91	74,2
	d	16	14,39	16	13,68	25	86	55,6	12,81	38	12,43	41	77	52,7	14,97	14	14,59	18	91	65,0
	e	16	11,29	33	10,36	40	65	8,1	10,18	50	9,78	53	61	15,7	13,01	24	12,50	27	78	18,3
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	6	5,63	15	5,24	23	87	66,7	4,80	36	4,61	40	77	55,1	5,76	13	5,46	21	91	78,3
	b	6	5,49	16	5,13	23	86	57,0	4,81	38	4,55	43	76	53,8	5,74	11	5,49	19	92	73,3
	c	12	10,45	26	9,73	36	81	54,8	9,63	36	9,27	40	77	51,6	10,40	14	11,01	19	92	65,0
	d	20	16,84	26	16,15	31	81	45,2	15,61	39	15,17	42	75	45,9	18,56	16	18,24	19	91	59,2
Az összes ismétléses variáció képzése	a	6	3,73	40	3,55	44	59	14,3	3,38	43	2,95	57	50	7,9	4,44	31	4,31	34	72	33,3
	b	12	7,88	47	6,18	63	52	6,7	7,17	39	6,52	47	53	5,4	10,08	27	8,72	46	73	25,8
	c	14	6,83	47	4,77	75	61	1,7	6,54	46	5,98	53	43	1,8	8,15	47	6,72	70	48	10,8
	d	20	14,98	24	14,13	26	71	6,7	13,10	35	12,15	42	60	5,8	16,00	23	15,58	24	78	21,7

10. táblázat. A képi "KOMBINÁLÁS" tesztek feladatainak eredményei

Feladat		T	10 évesek						14 évesek						17 évesek					
			\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J		J=1	\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J		J=1	\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J		J=1
				%		%	100 \bar{J}	%		%		%	100 \bar{J}	%		%		%	100 \bar{J}	%
Ismétléses kombinációk képzése	a	3	2,90	14	1,42	103	47	44,5	2,64	30	1,18	114	39	29,1	2,85	18	1,53	90	51	41,7
	b	4	3,66	24	2,76	45	69	43,7	3,27	40	2,35	60	59	35,0	3,82	13	2,90	37	73	45,0
	c	5	4,40	25	3,15	56	63	39,5	3,84	42	2,52	78	49	30,0	4,50	21	3,27	54	65	44,2
	d	6	5,29	26	4,33	38	72	35,3	4,95	32	3,84	50	64	31,4	5,55	19	4,84	35	81	57,5
	e	10	8,21	29	6,68	47	67	23,5	7,53	34	6,50	42	65	11,7	8,66	23	7,03	46	70	30,0
	f	10	8,88	24	7,67	38	77	37,8	8,36	26	7,24	37	72	24,5	9,38	18	8,59	28	86	55,0
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	3	2,82	24	2,52	42	84	80,7	2,88	18	2,64	35	88	85,1	2,95	13	2,73	30	91	87,5
	b	6	5,19	30	4,94	34	82	57,8	5,44	23	5,23	28	87	70,2	5,68	17	5,56	19	93	80,8
	c	10	8,23	34	6,70	51	67	23,7	8,43	26	7,91	31	79	35,4	9,45	13	8,81	24	88	54,2
	d	10	6,66	46	4,71	63	47	9,6	6,73	37	6,17	42	61	6,8	7,72	32	5,88	53	59	13,3
	e	15	8,79	51	7,07	58	47	0,7	7,77	48	7,01	52	46	2,4	10,82	35	9,25	43	62	5,8
Ismétléses permutációk képzése	a	3	2,75	21	2,61	28	87	72,6	2,58	35	2,45	41	82	72,0	2,88	13	2,81	19	94	85,0
	b	6	4,81	31	4,55	37	76	45,9	4,53	42	4,34	46	73	44,8	5,16	22	5,04	24	84	50,8
	c	12	7,79	42	6,52	58	54	8,1	7,24	52	6,89	54	57	13,8	9,73	24	8,86	36	74	17,5
	d	10	6,96	36	4,77	61	48	7,4	6,27	49	5,92	52	59	13,8	8,21	26	6,42	53	64	23,3
Az összes részhalmaz képzése	a	3	2,77	25	2,69	29	90	84,0	2,62	34	2,53	37	84	76,9	2,78	24	2,77	26	92	89,2
	b	7	6,08	28	5,99	29	86	62,2	5,68	33	5,48	38	79	44,0	6,45	17	6,44	17	92	67,5
	c	15	12,13	23	11,51	29	77	25,2	10,23	38	9,72	43	65	14,3	12,49	22	11,87	27	79	29,2

érdekes a d és az e feladat összehasonlítása. Mindegyikben 16 az összes lehetőség száma, de míg a d feladatban négy elem kéttagú, az utóbbiban két elem négytagú ismétléses variációját kell képezni. Tehát itt is a több tagú konstrukciók képzése bizonyul nehezebbnek.

Az INV négy képi feladatának teljesítményei között alig van különbség. A 14 éves mintánál a J 0,75 és 0,77 közé esik, a 17 éves korosztálynál pedig 0,91 vagy 0,92, és a 10 éveseknél is mindössze 6%-nyi különbség van a feladatok között. Nagymértékben hasonlítanak a szórások is, legnagyobb különbséget pedig a hibátlan megoldások tekintetében tapasztalunk. Az eredmények nagymértékű egyezésére az lehet az egyik magyarázat, hogy itt csupán a b feladatban kell háromelemű konstrukciókat képezni, de az is megoldható az a feladat mintájára. (Egyszerűen csak az a feladat kételemű konstrukcióihoz hozzá kell tenni a hiányzó harmadik elemet.)

Az ÖIV feladatai 14 éves korban 43-60%-os fejlettségűek. Érdekes módon a legmagasabb J érték a d feladathoz tartozik, mégpedig mind a három életkorban. A sorrend ilyen felcserélődésére a feladatok struktúrája alapján nem kapunk kielégítő magyarázatot. Mivel a konkrét tesztfeladatok tartalma is tökéletesen megegyezik, a tartalmi különbségek sem adhatnak magyarázatot az általánosan megfigyelt tendenciától való eltérésre. Minthogy a különbségek nem jelentősek, magyarázat lehet a véletlen ingadozás is.

A "VARIÁLÁS" teszt képi feladatainál az \bar{x} és a \bar{G} között már nagyobbak az eltérések, mint a manipulatív feladatoknál. Ez arra utal, hogy több a felesleges konstrukció. Tehát a rajzos jeleknél már nehezebb a konstrukciók azonoságának és különbözőségének a megállapítása, mint a konkrét, kézzel fogható tárgyak összeállításainál.

A "KOMBINÁLÁS" tesztekre jellemző, hogy a teljesítmények egy művelethez tartozó feladatokon belül már nagyobb különbségeket mutatnak.

Az ISK feladatainak J értékei megközelítőleg 40 és 70% közé esnek, tehát elég széles intervallumot fognak át. Érdekes azonban, és minden eddigi tendenciával ellentétes jelenség az, hogy a legalacsonyabb teljesítményt a legegyszerűbb a feladatnál találtuk. A különbség jelentős, és mindhárom életkorra érvényes, nem lehet tehát pusztán véletlen. Mivel pedig a feladatok tartalma pontosan megegyezik, ez sem lehet a különbség oka. A táblázatból az is kiderül, hogy az \bar{x} és a \bar{G} különbsége igen nagy: $\bar{x}=2,64$ és $\bar{G}=1,18$ a 14 éveseknél. A megfelelő relatív szórások $CV_x=30\%$ és $CV_J=114\%$. A feladat eredményeit tehát a sok feleslegesen felírt konstrukció rontja le. A tanulók nem tudják azonosítani a feladat feltételei szerint azonosnak számító konstrukciókat. Pontosabban, valószínű, hogy a szubteszt első feladatánál még nem tudatosul ez a feltétel, illetve maga a rajz, a kis ábrák száma nem segíti azt. A többi feladatnál már korántsem ilyen nagy az \bar{x} és \bar{G} különbsége. A legmagasabb J érték az f feladatnál található, amelyben ugyan kételemű konstrukciókat kell

képezni, de többet, mint az ugyancsak kételemű konstrukciókat előállító *d* feladatban.

Az INK feladatai már pontosan követik a struktúra alapján várható tendenciát. A kételemű konstrukciókat képező *a*, *b* és *c* feladat teljesítménye magasan kiemelkedik, 30-40%-ra elkülönülve a *d* és az *e* feladatoktól, amelyek három-, illetve négyelemű kombinációk képzését igénylik. Ezen belül a sorrend a konstrukciók növekvő számának felel meg.

Az ISP feladatok eredményeiben csupán a *c* és *d* feladatok teljesítményeinek felcserélődése tér el a várt tendenciáktól, a különbség azonban kicsi, és a két másik korosztálynál ez az anomália nem tapasztalható.

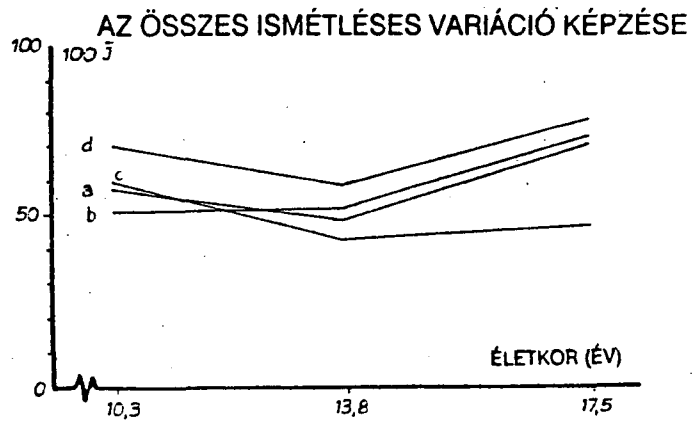
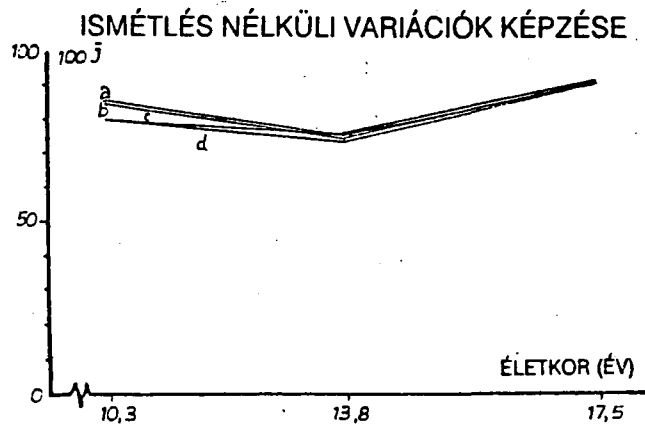
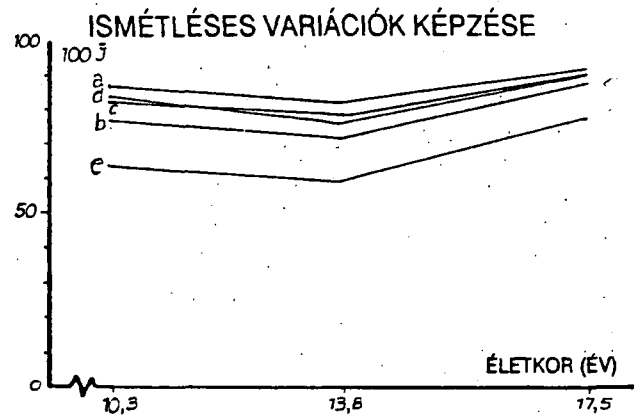
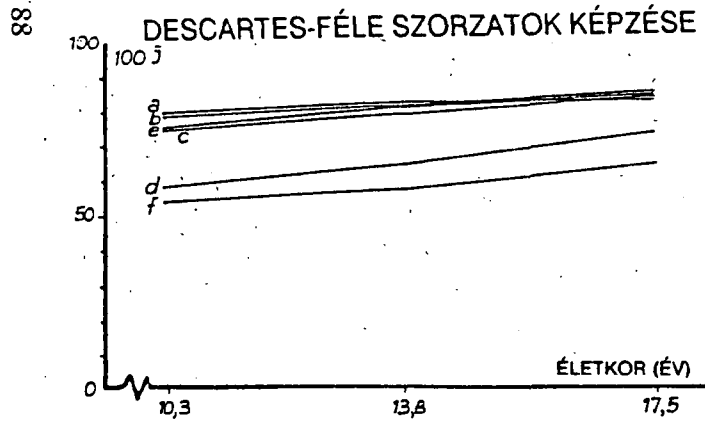
Az ÖRH feladatainak 65-84% közötti eredményei a manipulatív szint eredményeinél (a többi művelettől eltérően) jobbak, egyébként követik a konstrukciók hossza és a teljesítmény között általában fennálló reciprokt viszonyt. A *c* feladat, mely a Piaget által kiemelt, a logikai műveleteket rendszerré szervező kombinatorikai struktúra, 14 éves korban képi tartalommal 65%-os fejlettségű, azonban a feladatot hibátlanul csak a tanulók 14,3%-a oldotta meg.

6.2 A képi feladatok fejlődési folyamatai

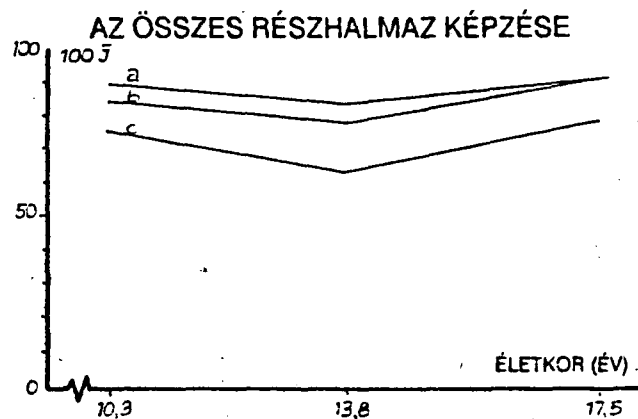
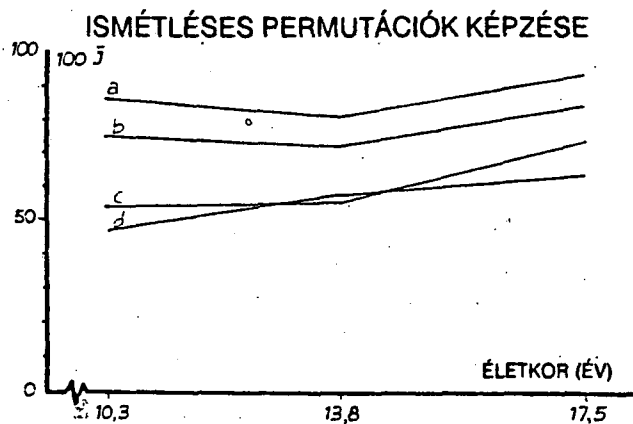
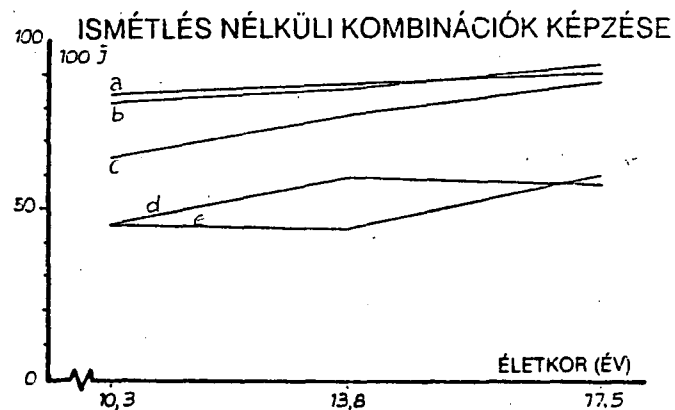
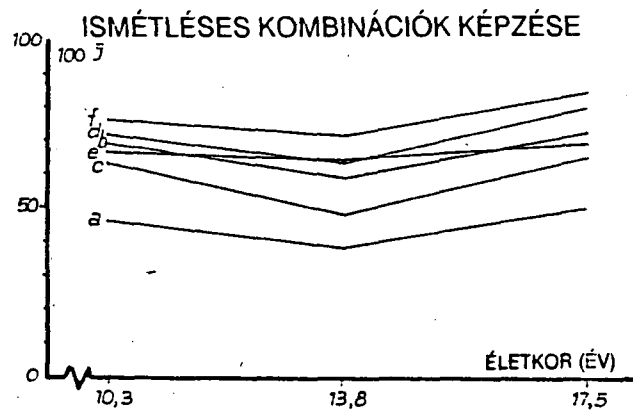
A képi tartalmú feladatok fejlődési görbéit a 15. és a 16. ábrán foglaltuk össze. Általában elmondhatjuk, hogy tiszta és egyértelmű fejlődési görbéket csak a Descartes-féle szorzatok képzésénél és az ismétlés nélküli kombinációk *a*, *b* és *c* feladatainál találtunk. A többi feladatra a 8. osztályos minta visszaesése, a lapos "V" alakú görbe a jellemző.

Mivel nagyon valószínűtlenül hat adatainknak az az interpretációja, hogy 10 és 14 év között "visszafejlődés" játszódik le, ismét igen gondosan ellenőriztük az eredmények helyességét, számba vettük az összes lehetséges hibaforrást. Technikai jellegű hibát nem találtunk. A legvalószínűbb torzító mozzanat már csak a minták nem megfelelő megválasztása lett volna. A negyedikes és nyolcadikos minta azonban ugyanazokból az iskolákból származik, sőt, megegyezett a vizsgálatot vezető pedagógus személye is, ezért ezt a lehetőséget is el kell vetnünk.

Torzító körülmény lehetne, hogy nem követéses vizsgálatot végeztünk, tehát, bár a két minta 10 és 14 évesek egyedei ugyanabból a szociális közegből kerültek ki, mégsem ugyanazokról a konkrét személyekről van szó, elvileg tehát előfordulhat, hogy négy év alatt a társadalmi környezetben végbementek olyan változások, amelyekben a kombinatív képesség 10 éves korra magasabb fejlettségi szintet ér el. A környezeti feltételek ilyen mérvű különbséget okozó tartós és folyamatos változása elvileg kizárt. Ha tehát a 10 éves minta valóban fejlettebb, mint a 14 éves minta volt négy évvel korábban, akkor emögött konk-



15. ábra
A képi feladatok fejlődési görbéi



16. ábra
A képi feladatok fejlődési görbéi

rét (csak az adott rövid időintervallumban ható) okoknak kell lennie. Ilyen okok létezését nem zárhatjuk ki, igen öröndetes lenne például, ha a matematikatanítás eredményesebbé válása lenne egy ilyen ok. Mindennek azonban kicsi a valószínűsége, vagy legalábbis a tapasztalt különbségekből csak kevés magyarázható a minták különbözőségével.

A negyedik és nyolcadik minta különbségeit pszichikus tényezőkkel magyarázva lényegében két különböző irányból közelíthetjük meg a kérdést: a 10 évesek különösen eredményesek, és/vagy a 14 évesek különösen eredménytelenek a képi feladatok megoldásában. Az eredményesség vagy eredménytelenség meghatározásában a megfelelő műveletek fejlettségén kívül más tényezők (figyelem, motiváció stb.) is szerepet játszhatnak.

Ezek után vegyük sorra az egyes feladatok fejlődési folyamatait.

A DSZ feladatainál lényegében egyenletes változást tapasztalunk, 10 és 17 év között mintegy 5-10%-os fejlődéssel. Az *a*, *b*, *e* és *c* feladatoknál az eleve magas induló szint miatt ennél több nem is várható, az alacsonyabb szintről induló *d* és *f* feladatoknál (3, illetve 4 elemű konstrukciók) pedig a fejlődés üteme nagyobb. Itt tehát a lehető "légszabályosabb" fejlődési görbékkel állunk szemben.

Az ISV *a*, *b* és *c* feladatánál 10 és 14 éves kor között egyaránt 5%-os visszaesést tapasztalunk, a *d* feladatnál 9%, az *e* feladatnál pedig 4%-os a visszaesés. A 17 évesek eredményei mindenütt jobbak a 10 évesekénél mintegy 5-10%-kal. A görbék (a *d* első szakaszát kivéve) közel párhuzamosan futnak, a bennük kifejeződő tendenciák egyértelműek, a véletlen ingadozás mint a visszaesés magyarázata szinte kizárható.

Az INV feladataira az előző szubteszt feladatairól elmondottak pontosan érvényesek, megtoldva még azzal, hogy itt a négy feladat eredményei majdnem egybeesnek, csak 10 éves korban van némi eltérés az *a-b* és a *c-d* feladatokból álló csoportok között. Az ÖIV *b* feladatánál nincs visszaesés. A *c* feladatánál viszont az előzőekben elemzetteknél is nagyobb, 18% a különbség a 10 évesek javára a 14 évesekkel szemben, és 13%-a a 17 évesekkel szemben. Ez az egyetlen képi feladat, ahol 10 és 17 év között nincs fejlődés, sőt jelentős a visszaesés. Az ÖIV négy feladata közül ez az egyetlen, amelyben háromelemű konstrukciókat is kell képezni (a többiben legfeljebb kételeműt.) Nehezen értelmezhető, de tény, hogy a manipulatív INV *c* feladat éppen ellenkező irányú anomáliával (a 14 évesek magas teljesítménye) képez kivételt.

Az ISK feladatainak görbéi (az *e* kivételével) megközelítőleg párhuzamosan futnak, jellemző rájuk a már elemzett (a 14 évesek gyengébb teljesítménye) tendencia. Az INK *a*, *b* és *c* feladatának fejlődési görbéje szabályos. A *d* görbe első szakaszára a fejlődés, a másodikra a kismértékű visszaesés jellemző, míg az *e*-nél pont fordítva van. A *d* és az *e* a két legbonyolultabb feladat ebben a szubtesztben, de hogy miért viselkednek ellentétes módon, arra a strukturális különbségek nem adnak kielégítő magyarázatot.

Az ISP feladatai közül csak az *a* és a *b* mutat jelentősebb visszaesést, a *c* már csak egészen keveset. Érdekes, hogy a görbék elhelyezkedése és alakja majdnem megegyezik a manipulatív tesztekénél tapasztalttal (és a formális szint görbéitől is csak egy ponton különbözik). Az ÖRH feladataiban nyújtott teljesítmények viszonylag magasak, és a görbékre ugyancsak a 14 évesek alacsonyabb teljesítménye jellemző.

A képi tartalom fejlődési görbéinek többsége tehát rendelkezik azzal a különös tulajdonsággal, hogy a 14 évesek teljesítménye alacsonyabb, mint a másik két korosztályé. Vizsgálatunk adatai alapján e rendellenes viselkedés okai nem deríthetők ki.

6.3 A képi szubtesztek eredményei

A képi szubtesztek 8. osztályos eredményei alapján számított összevont mutatóinak eloszlásait a 17. és a 18. ábrákon közöljük.

A DSZ és ISV szubtesztek eredményeinek eloszlása egymáshoz nagyon hasonló. Átlaguk egyaránt 73%p, a relatív szórás 38%, illetve 40%. Az eloszlások jobbra erősen aszimmetrikusak, de a legalacsonyabb teljesítményértékeknél (0-4 p) is van egy helyi maximuma a gyakoriságoknak (3,6% illetve 6,7%).

A képi tartalmú szubtesztek közül a legmagasabb az INV szubtesztben nyújtott teljesítmény 76 %-pontos átlaggal. Az eloszlás jobbra aszimmetrikus, a legmagasabb teljesítménykategóriába (40-44 p) a tanulók 48,3%-a esik. Ebből is 29,7% azok aránya, akik a szubteszt mind a négy feladatát hibátlanul oldották meg.

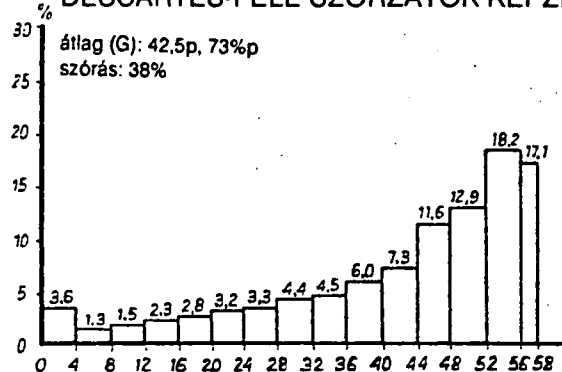
Az ÖIV-re (53 %-pontos átlaggal) a közepes teljesítmény jellemző, és egyben ez a legnehezebb képi szubteszt. A minta 90%-a 38p (73%p) alatt teljesített.

A "VARIÁLÁS" teszt szubtesztjeinek egymáshoz viszonyított eredményei jó közelítéssel úgy alakulnak, mint manipulatív megfelelőiknél, azonban a manipulatív tesztekénél mintegy 10%-kal, az ÖIV esetében 16%-kal alacsonyabbak.

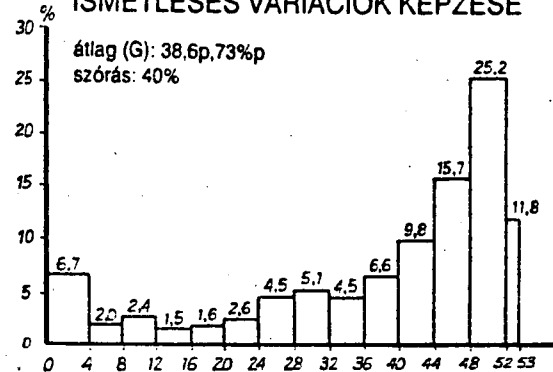
A "KOMBINÁLÁS" teszt négy képi szubtesztjének eredményei már nem állíthatók az előzőekhez hasonlóan párhuzamba a manipulatív szubtesztekkel. Érdekes azonban, hogy az eloszlások alakja hasonlít a megfelelő manipulatív eloszlásokra.

Az ISK a 62 %-pontos átlaggal alig marad el a manipulatív eredményektől. Az eloszlásnak két maximuma van, egy a közepes, egy pedig a magasabb teljesítményeknél. Van tehát e feladatoknak valamilyen tulajdonsága, mégpedig, mivel e "kétpúpú" eloszlás a manipulatív és a formális ISK szubteszten is megjelenik, e tulajdonság strukturális természetű, melynek kezelése két részmintára osztja a mintát. A minta egyik része sikeresen kezeli e tulajdonságot,

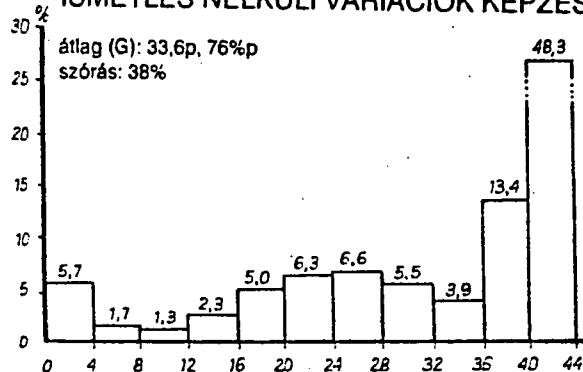
DESCARTES-FÉLE SZORZATOK KÉPZÉSE



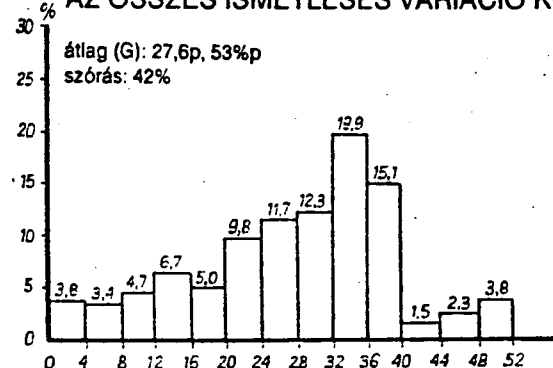
ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓK KÉPZÉSE



ISMÉTLÉS NÉLKÜLI VARIÁCIÓK KÉPZÉSE

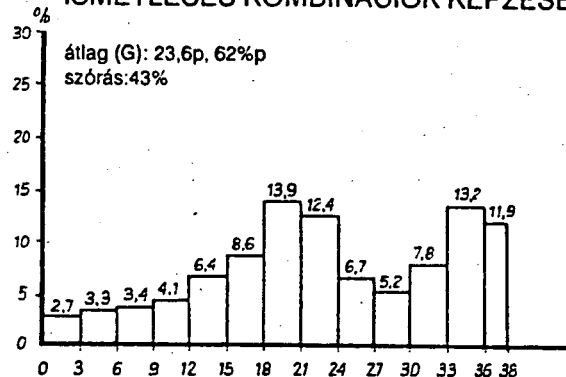


AZ ÖSSZES ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓ KÉPZÉSE

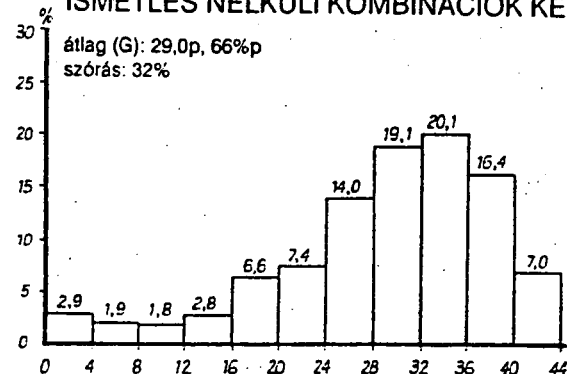


17. ábra
A képi szubteszték eloszlásai

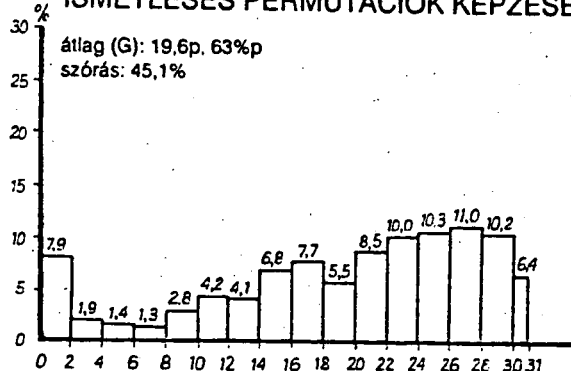
ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓK KÉPZÉSE



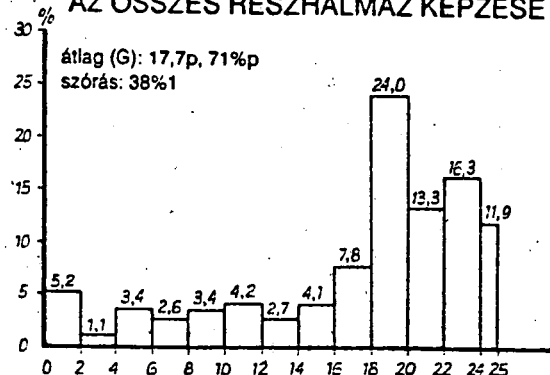
ISMÉTLÉS NÉLKÜLI KOMBINÁCIÓK KÉPZÉSE



ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓK KÉPZÉSE



AZ ÖSSZES RÉSZHALMAZ KÉPZÉSE



18. ábra

A képi szubtesztetek eloszlásai

ez a magasabb teljesítmények körül szóródó eloszlást ad, míg a másik része sikertelenül, ezek eloszlása a közepes teljesítmények körül szóródik, és e két eloszlás szuperpozíciója adja a kétmódusú eloszlást. A kérdéses tulajdonság a feladatok \bar{x} és \bar{G} értékeinek összehasonlításából következően valószínűleg a konstrukciók elemeinek a sorrendje lehet, pontosabban annak a feltételnek a kezelése, hogy az azonos elemeket különböző sorrendben tartalmazó konstrukciók ekvivalensek. (Természetesen más ok is lehetséges.)

Az ISP eloszlása hasonlít a manipulatív eloszláshoz, azzal a különbséggel, hogy képi tartalommal a legalacsonyabb teljesítménykategóriánál is van egy kiugró csúcs, és az átlag 63%, 10%-kal alacsonyabb a manipulatív megfelelőnél.

Az INK és az ÖRH teljesítményei képi tartalommal magasabbak, mint a megfelelő manipulatív szubtesztek teljesítményei, mégpedig az INK esetében 10%, az ÖRH esetében 33% a különbség. Az INK jobbra aszimmetrikus, kiegyenlített, közel normális eloszlást mutat, 66 %-pontos átlaggal. Az ÖRH nagyobb ingadozásokkal erősebben aszimmetrikus, átlaga 71%. A legkisebb teljesítményeknél megjelenő helyi csúcs emlékeztet a megfelelő manipulatív szubteszt U alakú eloszlására. E két szubteszt eltér a többitől abban, hogy itt a képi teljesítmény magasabb. Ennek okát csak a feladatok konkrét tartalmában kereshetjük. Vagy a manipulatív tartalom volt túl nehéz, vagy a képi tartalom a megoldást segítő, azt mintegy sugalló, rávezető jellegű. Mivel manipulatív szinten egyaránt (a DSZ kivételével) pálcikákat használtunk, az első feltételezést el kell vetnünk. Marad tehát a második: a képi tartalom ezekben az esetekben különösen "rávezető" jellegű lehet. A tesztfeladatokat megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy valóban ez a helyzet. Az INK feladatok ábrái, az elemek (bekarikázandó gyümölcsök) geometriai elhelyezkedése segíthette a megoldást. Az ÖRH feladatoknál pedig a pénzérméknek nemcsak a rajza, a rajzok megkülönböztetése segíthette a megoldást, hanem a részhalmozokba sorolt (bekarikázott) érmék értékének az összege is segíthette a különböző lehetőségek számba vételét, és az összes vagy minél több lehetőség megtalálását.

6.4 A képi teljesítmények összefüggésvizsgálata

A képi tartalommal végzett mérés összefüggésvizsgálatát a manipulatív tartalomnál követett gondolatmenet analógiájára végezhetjük. A feladatok szubtesztenkénti korrelációs mátrixait a 11. táblázatban foglaltuk össze. A táblázat minden értéke magas korrelációt jelez, a legalacsonyabb együttartható is 0,44.

A DSZ feladatainak belső korrelációi között nincs 0,5-nél alacsonyabb, a teljesítmények együvváltozása szoros. A szubtesztek feladatai bonyolultsági

11. táblázat. A képi szubtesztiek belső korrelációi

Descartes-féle szorzatok képzése		a	b	c	d	e
	b	79				
	c	70	80			
	d	53	63	62		
	e	62	73	75	69	
	f	50	56	54	74	60
Ismétléses variációk képzése		a	b	c	d	
	b	82				
	c	81	84			
	d	79	83	87		
	e	67	82	73	75	
Ismétlés nélküli variációk képzése		a	b	c		
	b	71				
	c	78	77			
	d	75	78	85		
Az összes ismétléses variáció képzése		a	b	c		
	b	80				
	c	65	71			
	d	63	72	71		
Ismétléses kombinációk képzése		a	b	c	d	e
	b	67				
	c	71	84			
	d	59	69	71		
	e	44	64	63	65	
	f	45	58	56	70	69
Ismétlés nélküli kombinációk képzése		a	b	c	d	
	b	68				
	c	64	69			
	d	56	57	69		
	e	44	47	61	72	
Ismétléses permutációk képzése		a	b	c		
	b	80				
	c	65	77			
	d	67	75	77		
Az összes részhalmaz képzése		a	b			
	b	77				
	c	71	80			

Megjegyzés: A táblázatban helykímélés érdekében a 0-át és a tizedesvesszőt elhagytuk.

sorrendben követik egymást. Minden feladatsorban az első feladatban fordul elő a legkevesebb kiinduló elem, és itt kell létrehozni a legrövidebb konstrukciókat, majd növekszik az elemszám és a konstrukciók hossza. Így a szubteszt utolsó feladata a legösszetettebb. Strukturális szempontból tehát az egymáshoz közeli vagy egymás melletti feladatok hasonlítanak leginkább egymásra. Ez megnyilvánul a korrelációkban is. A DSZ esetében például r_{af} a legalacsonyabb, de a többi szubtesztnél is az első és az utolsó feladat közötti együtttható (a mátrix bal alsó eleme) a legkisebb. E logika szerint a legnagyobb értékeknek az átló mentén kellene lenniük, ez azonban már csak tendenciaszerűen igaz. Érdekes lehet viszont utánanézni, mi van a tendenciától eltérő együttthatók mögött. Például a DSZ relatíve alacsony r_{bf} együttthatóját, amely az átlóban van, indokolja-e strukturális ok? A konkrét feladatokat megvizsgálva kiderül, hogy míg az e feladat kételemű, az f négyelemű konstrukciók képzését kívánja. A legmagasabb érték, az $r_{bc}=0,80$ viszont a legnagyobb strukturális hasonlósággal jár együtt.

A többi szubtesztre is érvényes az a megállapítás, hogy a strukturálisan leginkább hasonló feladatok között találjuk a legmagasabb korrelációt, ezen belül is a konstrukciók hosszában közelálló (vagy megegyező) feladatok eredményei függenek szorosabban össze.

Az előzőeknél szorosabbak az összefüggések az ISV ($r_{\min}=0,67$) és még szorosabbak az INV ($r_{\min}=0,71$) feladatai között. Az INV esetében az r_{ab} a legkisebb, azonban ennek is strukturális oka van: a b feladat a szubteszt egyetlen háromelemű konstrukciója, és egyben az egyetlen permutációja is.

Az ÖIV korrelációi is viszonylag magasak, míg az ISK és az INK korrelációs együttthatói között fordulnak elő a legalacsonyabb (0,44) értékek. Az ISP és az ÖRH belső korrelációi egyaránt magasak.

A képi szubtesztek belső összefüggései általában magasabbak, mint amit manipulatív szubtesztek esetében tapasztaltunk. Ennek sokféle oka lehet, többek között az alacsonyabb teljesítményszint és ezáltal a magasabb szórás is. Valószínű azonban, hogy az ilyen pusztán technikai okokon kívül a képi tartalom valóban a szubtesztek nagyobb homogenitását eredményezi.

A képi tartalmú feladatok megoldásában megnyilvánuló kombinatív képesség elemeinek nagy homogenitását bizonyítják a feladat-szubteszt korrelációk is (12. táblázat). E korrelációs együttthatók mindegyike szignifikáns, és többnyire meglehetősen szoros összefüggést jelez. Mindössze néhány érték van 0,3 alatt, viszont nagyon sok a 0,7-nél nagyobb. Természetesen itt is a "saját szubtesztjükkel korrelálnak legszorosabban a feladatok (ld. a bekeretezett számokat), azonban ezeken kívül is van néhány kiemelkedően magas korrelációs együtttható. Például az ISV d feladata az INV szubteszttel $r=0,85$ szinten korrelál. A strukturális "közelség" lehet az összefüggés magyarázata.

A képi tartalomnál a feladat-szubteszt korrelációk összességükben sokkal magasabbak, mint manipulatív megfelelőik. A feladat-tartalomindex korreláci-

12. táblázat. A képi feladatok korrelációi

Feladat		Képi szubtesztek								K	Kombinativ képesség
		DSZ	ISV	INV	ÖIV	ISK	INK	ISP	ÖRH		
Descartes-féle szorzatok képzése	a	72	46	40	41	29	49	44	41	59	39
	b	85	50	45	46	33	51	46	44	65	43
	c	83	50	46	47	36	50	48	47	66	44
	d	83	53	50	48	42	56	51	49	70	51
	e	84	54	51	47	35	53	50	45	69	47
	f	81	53	50	51	45	55	55	49	71	51
Ismétléses variációk képzése	a	49	85	73	43	40	56	67	49	74	43
	b	58	93	78	48	43	61	78	53	83	52
	c	53	92	82	44	39	61	76	49	81	49
	d	57	94	85	46	39	63	78	50	83	51
	e	54	90	73	51	42	64	84	53	82	57
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	43	72	85	40	37	51	65	44	70	46
	b	50	76	86	39	35	55	70	46	74	49
	c	51	81	94	44	36	60	72	46	79	54
	d	53	83	97	45	36	61	75	47	80	51
Az összes ismétléses variáció képzése	a	45	40	35	82	45	43	40	48	58	34
	b	48	45	42	89	45	47	46	50	64	39
	c	53	47	41	87	46	49	49	50	66	44
	d	48	46	43	92	43	50	48	53	65	38
Ismétléses kombinációk képzése	a	28	27	26	32	71	33	30	29	42	21
	b	33	32	28	39	85	38	32	39	49	24
	c	34	35	30	41	86	38	34	38	51	24
	d	37	40	35	42	87	43	40	45	56	28
	e	41	41	36	45	85	42	37	47	58	30
	f	40	39	35	45	84	45	37	49	57	29
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	43	50	47	39	33	70	44	48	58	39
	b	44	51	45	38	39	75	46	47	59	37
	c	53	61	58	46	42	68	62	65	72	49
	d	54	58	55	47	41	89	63	50	71	52
	e	52	57	54	51	43	87	63	50	71	50
Ismétléses permutációk képzése	a	47	80	72	42	34	58	80	46	73	44
	b	49	81	73	46	40	63	90	50	78	50
	c	55	77	70	49	38	64	93	46	78	56
	e	53	75	69	42	39	64	91	49	77	52
Az összes részhalmoz képzése	a	52	49	44	48	48	53	46	82	64	36
	b	45	46	42	46	46	50	43	91	61	37
	c	52	54	48	58	48	58	53	97	70	42

Megjegyzés: Helykímélés érdekében a táblázatban a 0-át és a tizedesvesszőt elhagytuk.

ők szintén magasak, a legkisebb érték is 0,42 (ISK *a* feladat). A legszorosabb korrelációkat az ISV feladatai adják (0,74-0,83), úgy látszik, ez a művelet reprezentálja legjobban a képi tartalom feladatainak összességét. A feladatok korrelációi általában az oszlopban lefelé haladva növekednek. Ennek azonban technikai oka is van: a lehetséges konstrukciók növekvő számának mértékében az adott feladat nagyobb súllyal vesz részt a képi tartalom összpontszámának kialakításában.

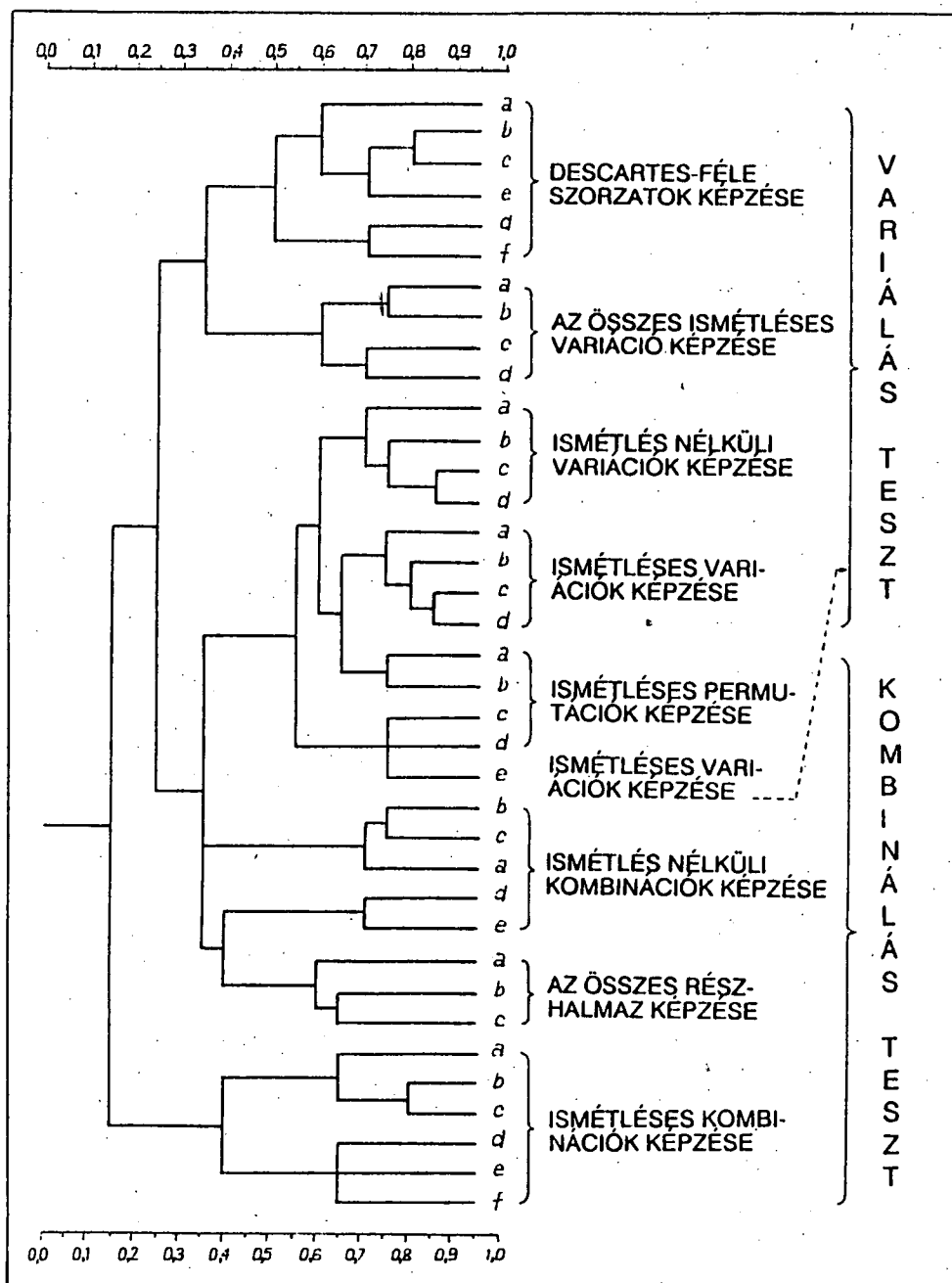
A képi tartalom feladat-kombinatív képesség összpontszám korrelációi is elég magasak, a legkisebb közülük 0,21 (ugyancsak az ISK *a* feladat). Kiemelkedően magasak az ISK és az INV együttthatói. Az ISV feladatai között találjuk a kombinatív műveleti képesség egészével legmagasabban korreláló feladatot, ez az *e* feladat, $r=0,57$ együttthatóval. Szorosan korrelálnak az összpontszámmal még az ISP feladatai is.

A manipulatív tartalomnál már ismertetett módon végeztünk klaszteranalízist a képi feladatokkal is. Ennek eredményét a 19. ábrán szemléltetjük. A feladatok hierarchikus osztályait ábrázoló dendrogram elemzését talán célszerű lesz itt is az egésztől a részek felé haladva elvégezni. Az ábra bal oldalát szemügyre véve azonnal látható, hogy a feladatrendszer nem esik szét független osztályokra, és a feladatok interkorrelációs mátrixában nem fordul elő 0,15-nél kisebb érték. Ezen a szinten válik külön két osztály, pontosabban az egyébként belül szorosan összefüggő ISK feladatok elkülönülnek a többitől. Ennek közvetlen számítástechnikai oka az ISK egy vagy több feladatának alacsony korrelációja a másik osztály feladataival. A különállás érdemi okát keresve a magyarázatot a 10. táblázat adatait elemezve találjuk meg: *e* szubteszt feladataiban fordul elő a legtöbb feleslegesen felírt konstrukció.

Még tovább haladva az oksági lánc "visszafejtésében", a konkrét képi tesztfeladatokig jutunk (ld. a függelék). Kiderül, hogy a feladatok tartalma (gyümölcsök bekeretezése) kínálja a felesleges konstrukciók bejelölésének lehetőségét.

Ami a másik nagy osztályt illeti, ez az $r=0,2$ szinten további két részre bomlik. Az egyik részbe a DSZ és az ÖIV feladatai kerülnek, belső tagozódásokban megőrizve a szubteszt feladatainak összetartozását. E két művelet szoros kapcsolatát nem indokolja a strukturális hasonlóság, sem pedig a feladatok konkrét tartalma.

Az öt további műveletet egyesítő osztályban két szubteszt (INK, ÖRH) megőrzi egységét, amin azt értjük, hogy feladatai szorosabban kapcsolódnak egymáshoz, mint más, külső feladatokhoz. A másik három szubteszt (ISV, ISP, INK) feladatai különféle más szubteszt feladataihoz kapcsolódnak. Az öt szubtesztből közelebbi kapcsolatban áll egymással az a három, amelyek feladataiban számít a konstrukciók elemeinek a sorrendje (INV, ISV, ISP). Érdekes, hogy az ISV *a-b-c-d* feladataiból álló osztályhoz társul az ISP *a-b* feladata, az ISV *e* feladata pedig az ISP *c-d* feladatokhoz kapcsolódva képez egy osztályt.



19. ábra
A képi feladatok klaszteranalízise

Itt lényegében a feladatok bonyolultsága az osztályképző-ismérv. Az INK és az ÖRH kapcsolatát strukturális okok indokolják, mindkettőben ismétlés nélküli kombinációkat (részhalmazokat) kell képezni. Az ÖRH zárt feladatcsoportjához az INK két legbonyolultabb feladata (*d* és *e*) kapcsolódik. Ez teljesen indokolt, hiszen az ÖRH feladataiban az összes különböző elemszámú kombinációt elő kell állítani, amely szempont ugyancsak a bonyolultságot növelő tényező.

Ami a szubtesztek belső tagozódását illeti, több műveletnél is megfigyelhető az a tendencia, hogy szorosabban a bonyolultabb feladatok kapcsolódnak össze, majd ezekhez "lépcsőzetesen" a csökkenő bonyolultság sorrendjében egyre lazábban a többi feladat. Tisztán megfigyelhető ez az INV, valamint az ISV négy feladata és az ÖRH esetében, és kisebb eltérésekkel több más szubtesztnél is.

6.5 A képi teljesítmények összefoglaló jellemzése

Ahogy a manipulatív tartalom eredményeivel tettük, célszerű lesz először itt is a két teszt eloszlását külön-külön megvizsgálnunk.

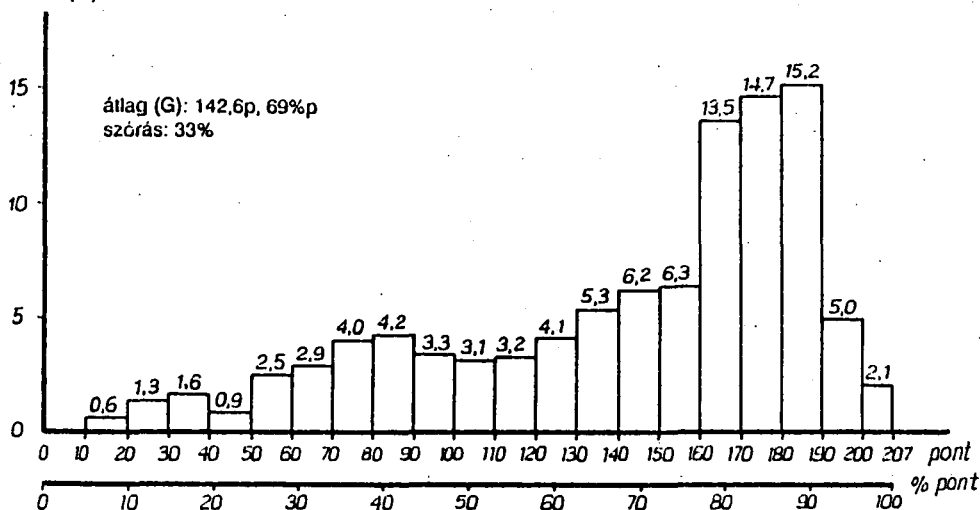
A "VARIÁLÁS" teszt (20. ábra) átlaga 69%-pont, relatív szórása 33%. A megfelelő műveletek tehát a tanulók nagy többségénél magas szinten kialakulnak. A teljesítmények eloszlása bimodális. (Ha nem tekintjük ingadozásnak a 40 és 50 p közötti alacsony értéket, akkor trimodális.) Az egyik maximum a 90%p körül található, a másik 40%p körül. A görbe alakja megengedi azt a feltételezést, hogy a minta két közel normális eloszlású részre bontható, a gyengén fejlettek 40%p-os móduszú és a magasan fejlettek 90%p-os móduszú részmintájára. Nagyon érdekes lenne megvizsgálni, vajon a háttérváltozókink között van-e olyan, amelyeknek értékei éppen a jelzett módon bontják két részre a mintákat.

A legalacsonyabb teljesítményosztályhoz nem tartozik gyakoriság, ami azt jelenti, hogy legalább 10 hibátlan konstrukciót még a leggyengébbek is felsoroltak. Hibátlan tesztmegoldás, tehát olyan tanuló, aki mind a 207 különböző konstrukciót helyesen felsorolta, és sehol nem képezett feleslegeset, mindössze egy volt a mintában.

A képi "VARIÁLÁS" teszt átlaga mintegy 10%-kal marad el a manipulativtól, ennyivel bizonyult a tanulók számára nehezebbnek a képi tartalom.

A "KOMBINÁLÁS" teszt (21. ábra) teljesítményeinek átlaga 65 %-pont, szórása 31%, tehát az eredmények alig rosszabbak a másik teszt eredményeinél. Az eloszlás alakja itt is bimodális. Az egyik maximum a 75%, a másik a 40% körüli teljesítményértékre esik. A "VARIÁLÁS" teszttel szembeni alacsonyabb átlagot tehát a kevesebb magas teljesítmény eredményezi. Az eloszlás

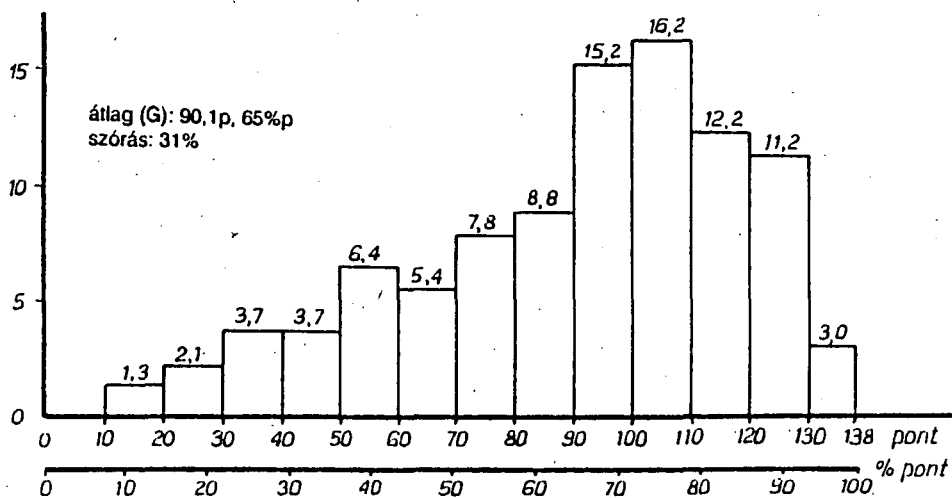
A tanulók
száma (%)



20. ábra

A képi "VARIÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása

A tanulók
száma (%)



21. ábra

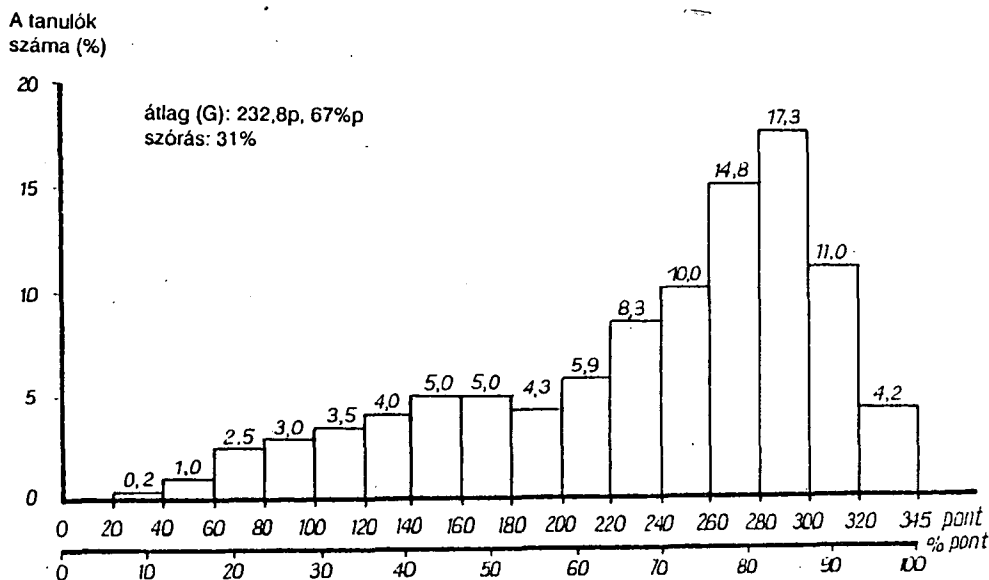
A képi "KOMBINÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása

alakja itt is megengedi azt a feltételezést, hogy az két közel normális eloszlás szuperponálódásával alakul ki. Itt sem találtunk 10 pont alatt teljesítő tanulót, de nem volt olyan sem, aki az összes feladatot hibátlanul oldotta meg.

A "KOMBINÁLÁS" teszt eredményeinek átlaga 6%-kal jobb, mint a megfelelő manipulatív teszt átlaga. Ez, mint azt a 17. ábra elemzése során megállapítottuk, az INK és az ÖRH szubteszteknek a manipulatív szintnél jobb eredményeiből fakad.

A képi tartalom összesített eredményeinek eloszlását a 22. ábra szemlélteti. Mivel az előzőekben elemzett két bimodális eloszlás összegzésével jött létre, ez az eloszlás is kétmódusú. Az átlaga 67%p, relatív szórása 31%. A nagyobb helyi maximum a 85% körüli teljesítményértékhez tartozik.

A teljesítményeket, illetve az eloszlás alakját a manipulatív tartalommal összevetve megállapíthatjuk, hogy a képi tartalmú feladatok összpontszámának átlaga csak 5 %-ponttal marad le a manipulatív tartalom átlaga mögött. Nagy azonban a különbség a görbék alakja között. A képi tartalom összpontszámának szórása sokkal nagyobb, és az eloszlás alakja is sokkal széthúzottabb teljesítményekről árulkodik.



22. ábra
A képi teljesítmények eloszlása

7. FORMÁLIS TARTALOM

7.1 A formális feladatok teljesítményei

Az előző két szinthez hasonlóan a formális tartalom vizsgálatát is a feladatok elemzésével kezdjük. A feladatok megoldásában nyújtott teljesítményekre vonatkozó adatokat a 13. és a 14. táblázatokban foglaltuk össze. Összességében elmondhatjuk, hogy az eredmények gyengébbek, mint amit az előző két tartalommal készített feladatoknál tapasztaltunk, itt már sok a közepes körüli vagy az alatti átlag.

A DSZ feladatainál találtuk a legmagasabb teljesítményeket formális tartalommal is. Az *f* feladatot kivéve a *J* átlaga megközelíti a 0,7-et. A hibátlan felsorolások aránya is igen magas. Például az *a* feladatot a 14 éves tanulók 70,1%-a oldotta meg hibátlanul, ezen túl hibás vagy nem teljes megoldás már alig fordult elő ($\bar{J}=0,72$). A hat feladat teljesítményei meglehetősen közel állnak egymáshoz, a legkönnyebb és a legnehezebb feladat *J* átlaga közötti különbség (14 éves korban) nem éri el a 0,2-et.

Az ISV feladatainak eredményei is magas teljesítményeket jeleznek, azonban az adatok sokkal szélesebb intervallumot fognak át, a \bar{J} különbsége (az *a* és az *e* feladat között) eléri a 0,4-et. Érdekes, hogy a hibátlan megoldások aránya itt már sokkal alacsonyabb, mint a DSZ esetében tapasztaltuk. Például az *e* feladat $\bar{J}=0,47$ értékehez már csak 6,7% hibátlan megoldás tartozik.

Az ISV *e* feladat minden számszerű jellemzőjét és struktúráját tekintve is megegyezik a DSZ *f* feladattal, az egyetlen különbség az, hogy a DSZ feladataiban a konstrukció mindegyik elemét más halmazból kell kiválasztani. Ez, mint az adatainkból kiderül, nagymértékben megkönnyíti a feladat hibátlan megoldását. (Megerősítik e megállapítást a másik két minta adatai is.)

Az INV adatai ugyancsak magas teljesítményt jeleznek, a négy feladat eredményei majdnem egybeesnek. Különösen az *a* és *b*, illetve a *c* és *d* feladatok teljesítményei állnak igen közel egymáshoz, ami a strukturális hasonlóság alapján indokolt is.

13. táblázat. A formális "VARIÁLÁS" teszt feladatainak eredményei

Feladat.		T	10 évesek						14 évesek						17 évesek					
			\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J		J=1	\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J		J=1	\bar{x}	CV _X	\bar{G}	CV _J		J=1
				%		%	100 \bar{J}	%		%		%	100 \bar{J}	%		%		%	100 \bar{J}	%
Descartes-féle szorzatok képzése	a	4	2,35	81	2,31	83	58	54,5	2,90	61	2,87	62	72	70,1	3,31	44	3,31	45	83	81,5
	b	6	3,40	82	3,28	85	55	46,4	4,30	62	4,27	63	71	69,5	5,05	43	5,04	43	84	81,5
	c	12	6,65	84	6,04	92	50	37,3	8,10	65	8,10	66	67	58,4	10,35	39	10,28	40	86	79,0
	d	8	3,80	99	3,79	99	47	40,0	5,37	67	5,34	67	67	60,3	6,88	39	6,84	39	86	79,8
	e	12	7,08	75	6,67	83	56	41,8	9,10	53	9,06	54	75	67,2	10,55	35	10,52	36	88	81,5
	f	16	5,21	133	5,01	136	31	12,7	9,65	73	9,51	73	59	43,7	13,16	43	13,01	43	81	56,3
Ismétléses variációk képzése	a	4	3,00	43	2,91	45	73	51,8	3,52	27	3,51	28	87	74,1	3,56	19	3,52	22	88	64,7
	b	8	3,39	78	3,38	78	42	6,4	5,40	45	5,37	46	66	27,1	5,59	36	5,52	38	69	27,7
	c	9	5,35	66	5,28	66	59	31,8	6,74	47	6,69	47	75	52,2	7,31	32	7,27	32	81	52,5
	d	16	10,05	61	9,69	65	61	10,0	11,85	43	11,77	43	73	43,1	12,71	30	12,51	31	78	4,2
	e	16	6,66	44	5,99	80	37	0,0	7,75	59	7,71	59	47	6,7	11,60	24	10,97	30	69	10,9
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	6	4,22	52	4,19	53	70	49,1	4,58	41	4,55	42	76	55,4	4,60	33	4,58	33	76	49,6
	b	6	4,11	49	4,03	50	67	39,1	4,66	41	4,62	42	77	56,5	4,53	47	4,47	49	75	58,8
	c	12	7,66	63	6,83	72	57	29,1	8,58	47	8,48	48	70	44,6	9,94	39	9,60	42	80	40,3
	d	20	14,34	51	13,70	54	69	34,5	14,00	48	13,92	48	69	40,3	14,45	40	14,10	43	71	39,0
Az összes ismétléses variáció képzése	a	6	3,34	46	3,30	47	55	12,3	3,31	45	3,25	47	55	11,5	3,56	41	3,54	41	59	14,8
	b	12	5,75	81	4,43	95	37	6,5	6,26	54	6,19	55	50	6,9	7,54	59	6,76	68	56	11,5
	c	14	7,92	42	6,84	51	49	2,2	5,76	55	5,72	56	41	2,4	7,80	52	6,73	67	48	4,9
	d	20	13,71	41	12,83	42	64	8,0	10,70	54	10,62	55	52	6,6	13,72	43	13,19	44	66	14,9

14. táblázat. A formális "KOMBINÁLÁS" teszt feladatainak eredményei

			10 évesek							14 évesek						17 évesek					
Feladat		T	\bar{x}	CV _X %	\bar{G}	CV _J %	$\frac{100\bar{J}}{J}$	J=1 %	\bar{x}	CV _X %	\bar{G}	CV _J %	$\frac{100\bar{J}}{J}$	J=1 %	\bar{x}	CV _X %	\bar{G} J·T	CV _J %	$\frac{100\bar{J}}{J}$	J=1 %	
Ismétléses kombinációk képzése	a	3	2,67	29	2,08	43	69	35,5	2,70	29	2,10	38	71	28,8	2,70	26	2,09	37	69	29,5	
	b	4	2,82	45	1,73	85	43	19,6	3,24	40	1,57	97	39	19,1	3,15	39	1,68	99	42	28,7	
	c	5	3,10	59	1,59	109	39	11,6	3,55	51	1,65	130	33	17,6	3,69	43	1,74	125	35	23,8	
	d	6	4,41	45	3,29	62	55	23,9	4,94	37	3,53	54	58	28,7	5,18	28	3,72	52	62	35,2	
	e	10	5,71	64	3,45	81	34	4,3	6,19	59	4,27	77	43	7,8	6,85	52	3,92	87	39	14,8	
	f	10	6,76	54	4,59	73	46	16,7	7,76	41	5,69	58	57	22,8	8,45	33	5,77	59	58	30,3	
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	3	2,34	52	0,46	220	15	11,8	2,46	46	1,24	112	41	35,3	2,57	40	1,23	118	41	37,5	
	b	6	5,23	31	1,32	165	22	12,6	5,03	36	2,60	98	43	27,6	5,16	34	2,41	112	40	26,7	
	c	10	8,75	30	3,55	84	35	12,6	7,97	39	5,01	72	50	25,0	8,54	35	4,78	80	48	24,2	
	d	10	5,82	53	2,17	76	22	1,6	5,80	53	3,60	80	36	6,0	6,32	56	2,47	102	25	3,3	
	e	15	4,90	83	3,40	101	23	0,0	5,40	70	4,22	75	28	1,0	6,73	74	4,84	87	32	2,5	
Ismétléses permutációk képzése	a	3	2,86	20	2,83	21	94	91,3	2,55	35	2,54	36	85	74,3	3,83	22	2,78	26	93	89,2	
	b	6	5,15	29	5,12	29	85	64,6	4,47	38	4,45	38	74	40,3	5,08	34	5,00	35	83	62,5	
	c	12	8,90	40	8,20	49	68	19,7	6,22	57	6,20	57	51	8,8	8,76	40	7,76	53	65	16,7	
	d	10	7,69	43	5,97	65	60	26,8	5,61	51	5,59	51	56	8,4	6,93	45	4,91	78	49	21,7	
Az összes részhalmaz képzése	a	3	1,71	60	1,44	74	48	28,3	1,68	58	1,36	71	44	18,2	1,83	57	1,51	68	50	25,4	
	b	7	2,88	83	2,17	111	31	10,1	3,40	71	2,28	111	33	13,0	3,68	75	2,45	119	35	23,0	
	c	15	6,12	89	4,73	97	32	1,4	5,58	90	4,45	101	29	4,0	7,75	75	6,23	87	42	8,2	

Az ÖIV feladatainak eredményei a leggyengébbek, egy feladat (c) az 50%-ot sem éri el. Különösen alacsony a hibátlan megoldások aránya, például a c feladatnál 14 éves korban mindössze 2,4%.

A "VARIÁLÁS" teszt feladatainak \bar{x} és \bar{G} értékeit összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy közöttük csekély a különbség, vagyis a feleslegesen felírt konstrukciók száma elenyészően kevés. Ez az eredmény meglepő, mivel azt várhattuk volna, hogy a jelekből és a szimbólumokból előállított konstrukciók között nehezebb különbséget tenni, mint a konkrét, kézzelfogható tárgyak, illetve rajzok között. Ugyancsak a felesleges (több ekvivalens vagy azonos módon ismételődő) konstrukciók felírását valószínűsíthetné az is, hogy a formális feladatoknál a felírható konstrukciók számát semmi sem korlátozza, míg a manipulatív tartalom esetében a kiadott eszközök, a képi feladatoknál pedig az ábrák száma jelentett korlátot vagy hozzávetőleges támpontot az összes különböző lehetőség számát illetően. A jelenséget azzal magyarázhatjuk, hogy a betűk segítségével képezhető konstrukciók azonosítása könnyű a tanulók számára. Feltűnően magas viszont az eredmények relatív szórása, amiben, mint az a táblázatból kiderül, a feleslegesen felírt konstrukciók alig játszanak szerepet (x és J szórása megegyezik, vagy legfeljebb 1%-nyi különbség van közöttük).

A "KOMBINÁLÁS" teszt formális változata empirikusan a legnehezebbnek bizonyult, azonban az ISP feladatainak eredményei még itt is 50% felett vannak, az ISK feladatai 50% körüliek, és csak az INK és az ÖRH teljesítményei vannak 50% alatt.

Az ISK feladataiban igen magas a feleslegesen felírt konstrukciók száma. Különösen a b és még inkább a c feladatban. A c feladat az egyetlen, amelyben 4 elemű konstrukciókat kell képezni. 14 éves korban az $\bar{x}=3,55$, míg a $\bar{G}=1,65$, ami azt jelzi, hogy a feleslegesen felírt konstrukciók száma igen magas. Lényegében ez az, ami azután a teljesítményeket széles skálán széthúzza. Az x relatív szórása 51%, a J relatív szórása viszont 130%. Az INK feladatai keretében érdekes módon fordított a helyzet: itt éppen a legegyszerűbb feladatnál fordul elő a legtöbb feleslegesen felírt konstrukció.

Az ISP feladatainak fejlettsége meglepően magas, a \bar{J} 0,85-től 0,56-ig változik. Lévéen az elemek sorrendjének is szerepe, itt nagyon kevés a felesleges konstrukció.

Az ÖRH feladatainál már a jó konstrukciók száma is alacsony és nagy a szóródás. Az eredményeket tovább rontja és a szóródást is növeli a felesleges konstrukciók nagy száma. Például a b feladatban $CV_x=71\%$, CV_J pedig 111%. A négyelemű halmaz összes részhalmazainak képzését 14 éves korban a tanulók 4%-a oldotta meg hibátlanul, a nem teljes megoldásokat is figyelembe véve a \bar{J} érték 0,29. Piaget elmélete értelmében e műveletnek 14 éves korra ki kellene alakulnia, tapasztalataink azonban e várakozást nem igazolják. Mivel Piaget szerint az összes részhalmaz képzése foglalja keretbe a 16 kétváltozós logikai

műveletet, felvethető a kérdés, hogy vajon az elméletnek megfelelően a logikai műveletek rendszere sem alakul ki, vagy pedig a logikai műveletek rendszere e struktúra nélkül is kifejlődhet.

A legnehezebb formális feladatnak az INKe feladat bizonyult. Tízéves korban nem is akadt hibátlan megoldás, a nem teljes felsorolásokból is csak a $\bar{J}=0,23$ jött össze. 14 éves korban mindössze 1% ($\bar{J}=0,28$), 17 éves korban pedig 2,5% ($J=0,32$) a tökéletes felsorolások aránya.

7.2 A formális feladatok fejlődési folyamatai

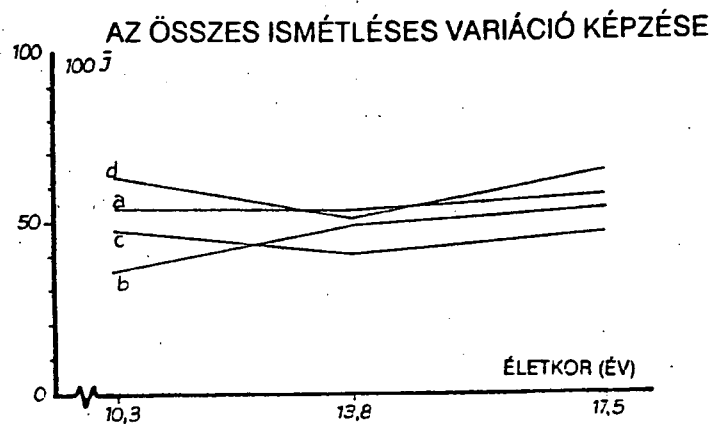
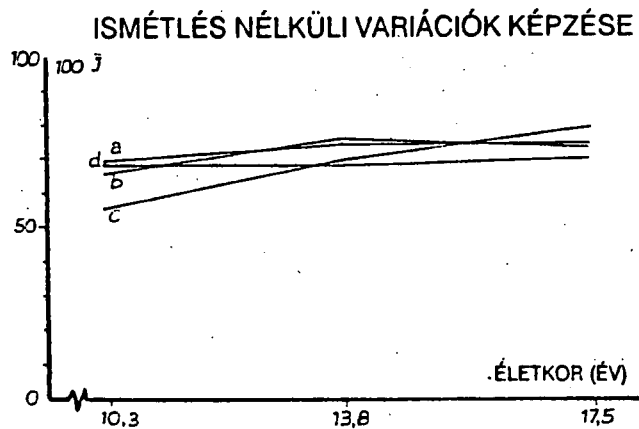
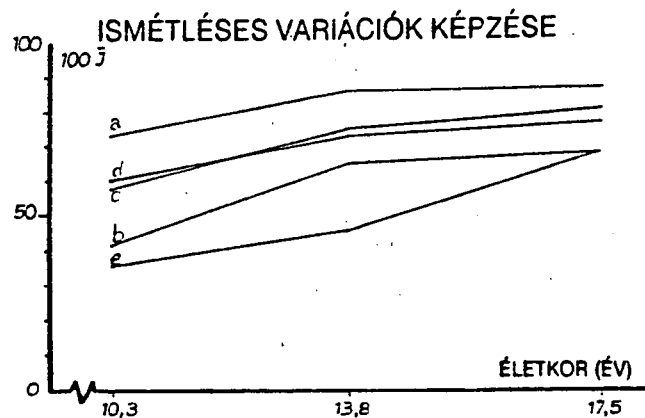
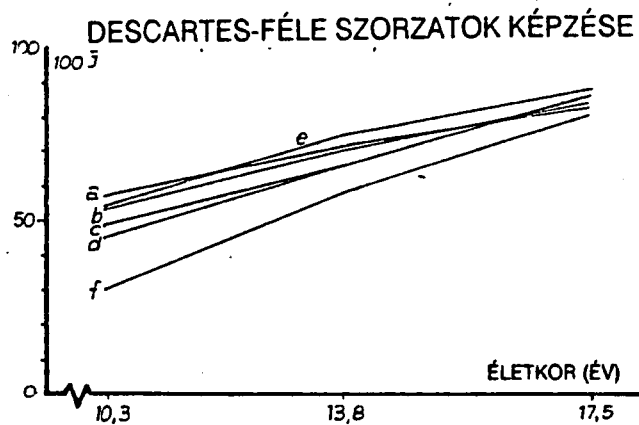
A formális feladatok fejlődési folyamatait a 23. és a 24. ábrákon mutatjuk be.

Jelentős fejlődést és szabályos fejlődési görbéket csak a DSZ feladatainál találunk. Kisebb, de még mindig érzékelhető fejlődés tapasztalható az ISV és az INK feladatainál, a többi szubteszt feladataira különböző anomáliákat mutató fejlődési görbék esetében inkább a stagnálás a jellemző.

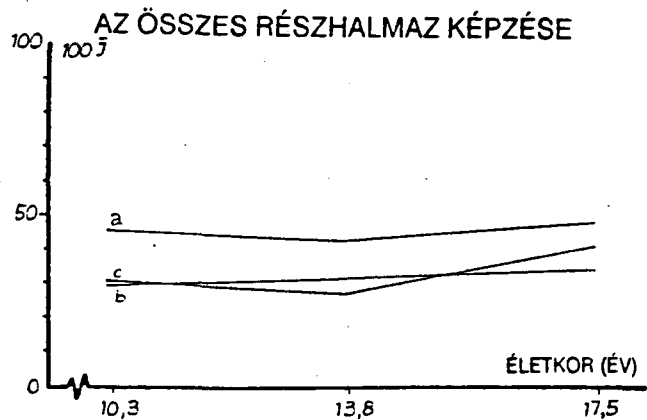
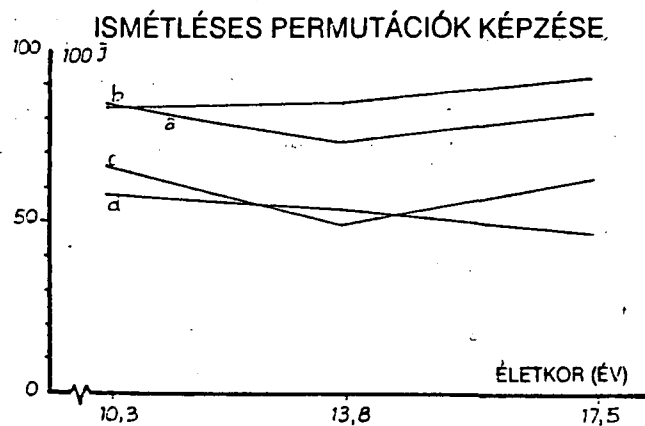
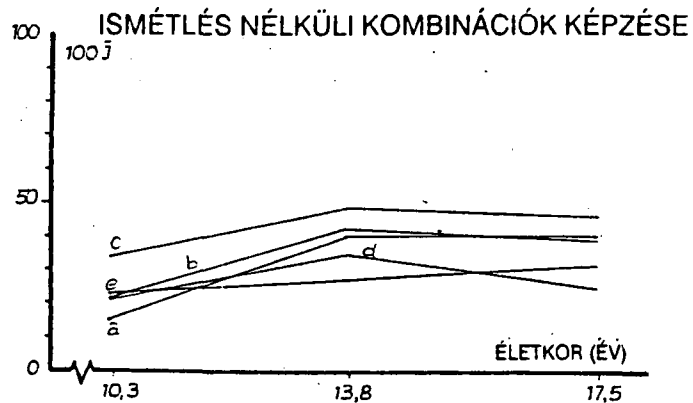
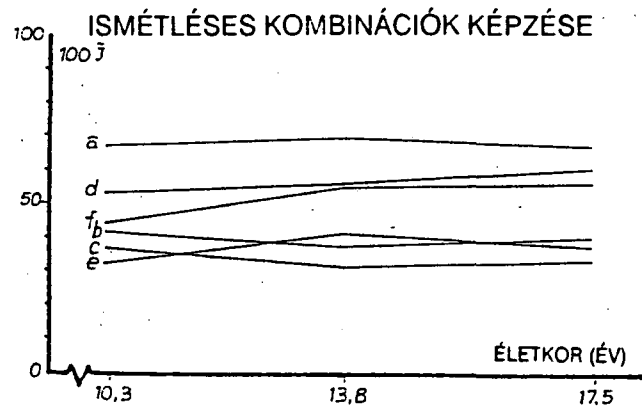
A DSZ feladatainak megoldásában a tanulók a 10 éves korban elért 50%-os vagy az alatti szintről 17 éves korra eljutnak a 85% körüli értékekig. A legnagyobb a fejlődés az *f* feladatnál: 31%-ról ($\bar{J}=0,31$) 81%-ra ($\bar{J}=0,81$). Ez éppen 50%, és egyben a legnagyobb változás, amit a 111 feladat megoldásában 10 és 17 éves kor között tapasztaltunk. A görbék alakja és elhelyezkedése megfeleltethető a logisztikus görbe felső, telítődési szakaszának, tehát ilyen értelemben is "szabályos" fejlődési folyamatot jellemeznek.

Az ISV feladatai közül az *a*, *b*, *c* és *d* feladatok fejlődési görbéi ugyancsak szabályosnak tekinthetők, melyekre 10 és 14 éves kor között a nagyobb (pl. a *b* feladatnál $\bar{J}=0,42$ -ről 0,66-ra) fejlődés, majd a stagnálás, illetve csekélyebb növekedés a jellemző. Az *e* feladat görbéje is növekvő mindkét szakaszon, csakhogy a változások aránya éppen fordított, először lassúbb, majd gyorsabb, tehát inkább a logisztikus görbe induló szakaszára emlékeztet. A görbék alakját és elhelyezkedését a manipulatív tartalom megfelelő ábrájával (7. ábra) összehasonlítva lehetetlen nem észrevenni a hasonlóságot. Az eltérést lényegében csak a formális feladatok nagyobb különbségei és az alacsonyabb teljesítmény jelenti. Megfigyelhető viszont az *e* feladat jellegzetes különállása és a görbe jellegzetes alakja, sőt ebben még a képi tartalom (ld. 15. ábra) is hasonlít. További hasonlóság, hogy a *d* és a *c* feladatok görbéi egyaránt átmetszik egymást, képi és formális tartalommal még a metszés időpontja is megegyezik.

Mindebből több következtetést is levonhatunk. Az egyik mérőeszközeink validitásával, illetve sajátos vizsgálataink céljaira való alkalmasságával kapcsolatos. Ha ugyanis a fejlődési görbék egymásra vonatkoztatott alakja a feladatok konkrét tartalmának, absztrakciós szintjének változásaival szemben ennyire állandó, akkor a különböző mérőeszközök valószínűleg ugyanazt a



23. ábra
A formális feladatok fejlődési görbéi



24. ábra
A formális feladatok fejlődési görbéi

struktúrát reprezentálják. Másik következtetésünk az egymást keresztező görbékkel kapcsolatos. A feladatok empirikus nehézsége, pontosabban az egymáshoz viszonyított nehézségük nem független az életkortól, azaz nem mondhatjuk, hogy az egyszer s mindenkorra adott, hanem a feladatok nehézségi sorrendje az életkor függvényében változik. Esetünkben, mivel az egyes szubtesztokban ugyanazoknak a műveleteknek számértékben különböző feladatairól, különböző bonyolultságú feladatokról van szó, azt mondhatjuk, hogy a bonyolultság szerepe sem független az életkortól. E megfontolást a műveletek közötti viszonyokra általánosítva megfogalmazhatjuk azt a hipotézist is, hogy a kombinatív művelési képesség struktúrája sem állandó az időben, vagyis a fejlődés nem egy adott szerkezet elemeinek mennyiségi növekedésével megy végbe, hanem közben maga a struktúra is átrendeződik.

Megállapításainkat a többi szubteszt feladatainak elemzése is megerősíti. Az INV feladataira az jellemző, hogy a négy feladat eredményei igen közel állnak egymáshoz, valamint a fejlődés igen csekély. E két vonás egyébként a manipulatív és a képi szubteszt fejlődési görbéit is jellemzi. A formális tartalom érdekessége viszont, hogy míg 10 éves korban a *c* feladat eredménye a legalacsonyabb, 17 éves korban a legmagasabb. Itt tehát az empirikus nehézségi sorrend erősen átrendeződik.

Az ÖIV feladatainak eredményei 10 éves korban még jelentős különbséget mutatnak ($\bar{J}_b=0,37$; $\bar{J}_d=0,64$). Ez a különbség 14 éves korra nagymértékben csökken azáltal, hogy a *d* és *c* feladatok teljesítményei csökkennek, a *b*-é növekszik. 14 éves kor után csak a *d*-nél van jelentősebb fejlődés. A görbék elrendezése nagyon hasonlít a képi tartaloméhoz (15. ábra), a manipulatív tartalommal (7. ábra) viszont már csak távoli a hasonlóság (de ott is jellemző a különbségek csökkenése majd növekedése).

Az ISK feladatait a stagnálás jellemzi, az *a* és a *d* feladatok fejlődése például majdnem egy vízszintes egyenessel jellemezhető. Igen nagy a hasonlóság a manipulatív feladatok görbéivel (pl. az *e* görbe alakja), de néhány mozzanatban a képi tartalommal is (pl. a *b*, *c*, *e* görbék alakja, helyzete).

Az INK feladataira az alacsony (50% alatti) teljesítmények és a csekély fejlődés jellemző. Az *a*, *b* és *c* görbék egymással közel párhuzamosan futnak, míg a *d* és *e* görbék jellegzetes módon egymást kétszer is metszik. Érdekes módon a másik két tartalomra is jellemző anomáliák ellenére is nagyon sok a görbék lefutása közötti hasonlóság (pl. az első három feladat görbéjének párhuzamossága mindhárom tartalomra jellemző, míg a *d* és *e* görbék jellegzetes helyzete képi és formális tartalommal hasonló).

Az ISP fejlődési görbéi a tartalomtól való függetlenséget talán az összes szubteszt közül a legszebben szemléltetik. Az azonos struktúrájú, de különböző tartalmú feladatok görbéi nemcsak alakjukban és egymáshoz viszonyított helyzetükben hasonlítanak egymásra, de még a teljesítmények abszolút értékeiben is. Jellegzetes az *a* és *b* feladat kiemelkedő teljesítménye, és a nyolcadikosok

visszaesését mutató lapult V alak, valamint a *c* és *d* görbéknek az ellentétes töréseikkel egymást kétszer is átmetsző helyzete. Három különböző tartalommal háromszor kaptuk ugyanazt az elrendeződést, nem lehet tehát véletlen. Tovább növeli eredményeink hitelességét és érvényességét (ami más összefüggésben hátrány lehet), hogy a 10 és a 17 évesek esetében a különböző tartalmú tesztek más-más mintával vettük fel, csak a 14 évesek mintája azonos mindhárom tartalmú teszt esetében.

Ténynek kell tehát tekintenünk például azt, hogy a *c* és *d* feladat nehézségi sorrendje kétszer is felcserélődik. De miért? És miért éppen 14 éves korban nehezebb a *d* feladat a *c*-nél? Értelmezésként – a jelenség szintjén maradva – elmondhatjuk, hogy a *c* feladatban 4 elemből 12 konstrukciót lehet előállítani, míg a *d* feladatban 5-ből 10-et. De miért jelent könnyebbséget 14 éves korban az, ha kevesebb konstrukciót kell készíteni, míg a két másik életkorban az, ha kevesebb a kiindulási elem? A "miért"-ek sorát folytathatnánk, ezekre azonban a bemutatott adatok alapján nem, hanem csak finomabb, például a felsorolási sorrendeket is figyelembe vevő adatelemzés, illetve további vizsgálatok révén kaphatunk választ.

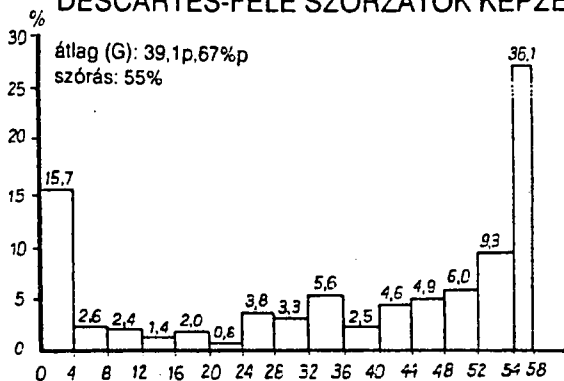
Az ÖRH feladatait az alacsony teljesítmények és a fejlődés hiánya jellemzi. A görbék elhelyezkedése, de még a teljesítmények szintje is nagyon hasonlít a manipulatív feladatoknál tapasztaltakra (8. ábra), csupán a görbék törése különbözik. Az alakbeli különbségek olyan csekélyek, hogy annak oka lehet a kis minták nem pontosan ekvivalens volta is. Itt is érdekes (mindkét említett tartalomnál megfigyelhető), hogy a *b* és *c* görbék kétszer is metszik egymást. Az ÖRH képi tartalmú görbéi (16. ábra) mások, az anomáliák lehetséges okairól a képi tartalom eredményeinek elemzése során már szóltunk.

7.3 A formális szubtesztek eredményei

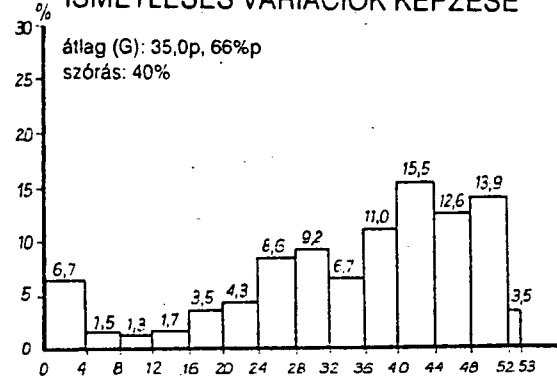
A 14 éves minta formális szubteszteken elért eredményeinek eloszlását a 25. és a 26. ábrákon bemutatott hisztogramok szemléltetik.

A Descartes-féle szorzatok képzésének átlaga százalékpontban kifejezve 67%p, relatív szórása meglehetősen magas, a "VARIÁLÁS" teszt szubtesztjei közül a legmagasabb, 55%. Az eredmények jellegzetes U alakú eloszlást mutatnak, a legkisebb és a legnagyobb teljesítményosztályhoz tartoznak a legmagasabb osztálygyakoriságok. A többi osztály gyakorisága többnyire az 5%-ot sem éri el. Négy pontot vagy annál kevesebbet a tanulók 15,7%-a ért el, és ezen belül 14,2% a 0 pontos eredmény. A legmagasabb teljesítményosztályba (57-58 p) a tanulók 36,1%-a tartozik, ebből 32,7% teljesen hibátlan megoldás. Ez a szubteszt tehát igen erősen differenciál, a tanulók fele vagy teljesen jó, vagy teljesen rossz megoldást produkált.

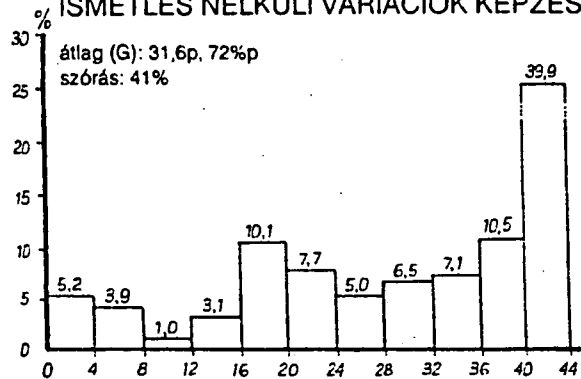
DESCARTES-FÉLE SZORZATOK KÉPZÉSE



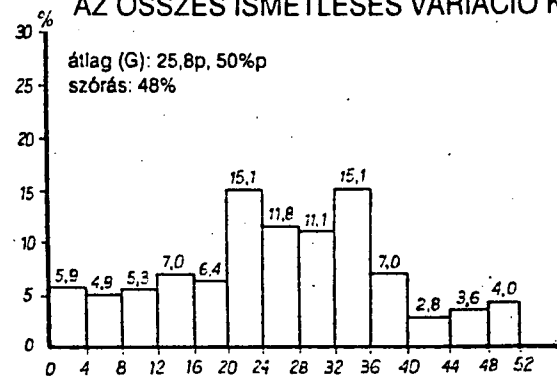
ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓK KÉPZÉSE



ISMÉTLÉS NÉLKÜLI VARIÁCIÓK KÉPZÉSE

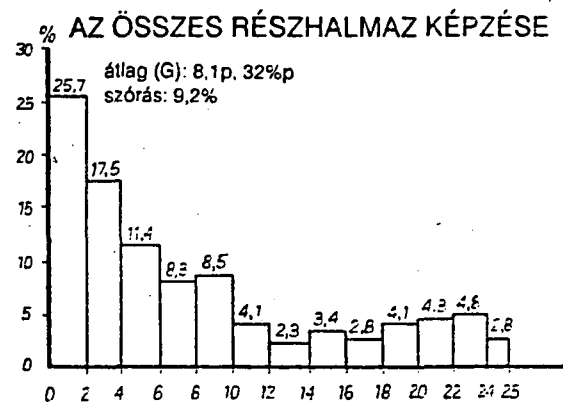
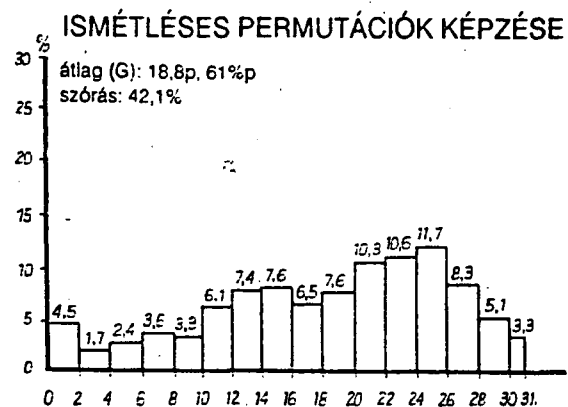
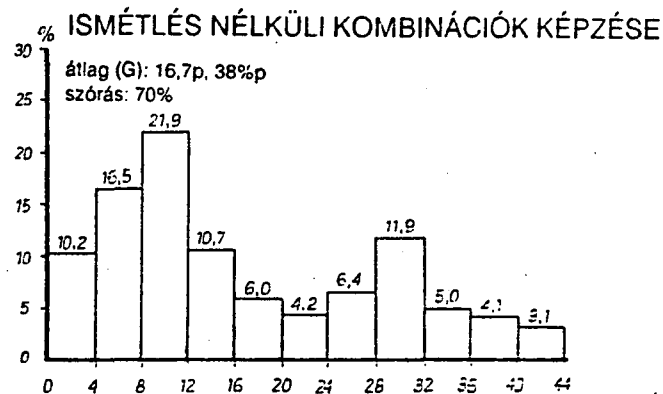
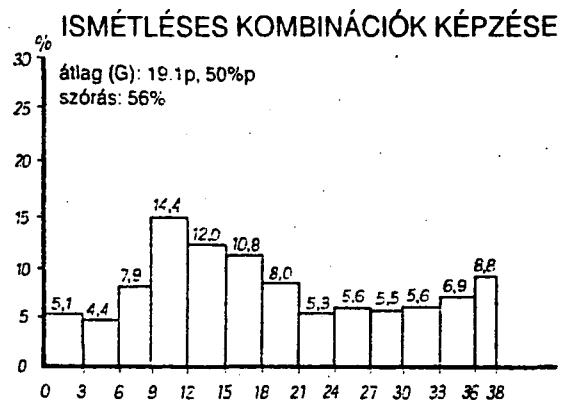


AZ ÖSSZES ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓ KÉPZÉSE



25. ábra

A formális szubcsztek eloszlásai



26. ábra
A formális szubieszték eloszlásai

Az ISV eloszlása enyhén jobbra aszimmetrikus, az átlag 66%p, a relatív szórás 40%. Az eloszlás alakjában vannak a bimodalitásra utaló maximumok. Még határozottabban érzékelhetők a bi- (esetleg tri-) modalitás jegyei az INV eloszlásán. A maximumok a legkisebb, a közepes körüli és a legmagasabb teljesítménysztyályokhoz tartanak. Az átlag 72%p, egyben a formális szint legmagasabb átlaga. A relatív szórás 41%-os. A legmagasabb teljesítménysztyály relatív gyakorisága 39,9%, 25,6% a teljesen hibátlan megoldás.

Az ÖIV átlaga 50%p, relatív szórása pedig meglehetősen magas, 48%. Az eloszlás közel szimmetrikus. Két maximummal rendelkezik, ezek gyakorisága egyaránt 15,1%, és a helyzetük is majdnem szimmetrikus.

Az ISK átlaga ugyancsak 50%p, és az eloszlás is bimodális. Alakja azonban nem szimmetrikus, az egyik módusz a legmagasabb teljesítménysztyálynál, a másik a teljesítményskála negyede körül (9-12p) van. A relatív szórás itt is magas, 56%-os. Az INK bimodális eloszlásában jelentkezik a legtisztábban a két szinte teljesen elkülönülő, normálisra emlékeztető eloszlás. Az átlag meglehetősen alacsony, 38%p, a relatív szórás viszont nagyon magas, 70%. Az ISP eloszlása lapos, kissé jobbra aszimmetrikus a bimodalitás enyhe jeleivel. Az átlag 61%p, ami a "KOMBINÁLÁS" szubtesztjei közül a legmagasabb. A relatív szórás 42%. Az ÖRH szubteszt eredményei formális tartalommal a leggyengébbek. Az átlag csupán 32%p, viszont itt találtuk a legnagyobb relatív szórást, 92%-ot. Az eloszlás szélsőségesen ferde, csaknem J alakú. A legalacsonyabb teljesítménysztyály (0-2p) gyakorisága 24,7%, de ebből mindössze csak 1,6% a 0 pontos szubtesztnek mennyisége.

Ha a formális szubteszt eloszlását egymással összehasonlíttjuk, nagyon hasonlóan találjuk a DSZ és a INV, valamint az ISV-ISP szubteszt eloszlásainak alakját. Ezek a hasonlóságok a megfelelő műveletek strukturális hasonlóságával járnak együtt.

7.4 A formális teljesítmények összefüggésvizsgálata

A formális feladatok közötti kapcsolatok elemzését ismét a szubteszt korrelációs mátrixainak értelmezésével kezdjük. A korrelációs mátrixokat a 15. táblázatban foglaltuk össze.

A korrelációs együtthatók általános jellemzéseként megállapíthatjuk, hogy a szubteszteken belül a feladatok egymással igen szorosan korrelálnak. A táblázat legkisebb együtthatója 0,45, de a korrelációk többsége 0,6 fölött van. A legmagasabb értéket a DSZ szubteszt *a* és *b* feladata között találtuk: $r_{ab} = 0,91$.

A korrelációs együtthatók túlnyomó többségének nagysága, pontosabban egymáshoz viszonyított aránya megfelel a korábban már ismertetett tendenciának, vagyis a nagyobb értékek a főátló mentén helyezkednek el. Többnyire a

15. táblázat. A formális szubtesztek belső korrelációi

	a	b	c	d	e
Descartes-féle szorzatok képzése	b 91 c 85 d 57 e 64 f 58	90 60 68 56	65 72 61	70 78	67
Ismétléses variációk képzése	a 57 b 57 c 60 d 48	65 71 74	77 58	65	
Ismétlés nélküli variációk képzése	a 50 b 69 c 68	60 61	84		
Az összes ismétléses variáció képzése	a 66 b 64 c 56	69 74	69		
Ismétléses kombinációk képzése	a 45 b 49 c 64 d 51 e 59 f 59	70 53 52 50	64 61 58	67 77	67
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a 74 b 70 c 60 d 48	81 66 53	71 58	74	
Ismétléses permutációk képzése	a 59 b 48 c 54	62 65	77		
Az összes részhalmaz képzése	a 70 b 70	81			

Megjegyzés: Helyikímélés érdekében a táblázatban a 0-át és a tizedesvesszőt elhagytuk.

tendenciától való eltérés is értelmezhető, van azonban egy jelentős kivétel, aminek nehéz megtalálni a magyarázatát. Ez pedig az ISK *a* és *b* feladata közötti alacsony, a formális tartalom legalacsonyabb korrelációja. E feladatok között magas korrelációt várhatnánk, hiszen mindkettő kevés (az *a* három, a *b* pedig négy) konstrukció felsorolását követeli meg. Különbség viszont, hogy míg az *a* feladatban háromelemű, a *b* feladatban négyelemű konstrukciók szerepelnek. Ez lehet tehát az alacsony korreláció magyarázata, vagyis a konstrukció elemszáma szorosabb kapcsolatot jelent a feladatok között, mint a felsorolandó konstrukciók száma. Bizonyítja ezt az is, hogy az ugyancsak kételemű (de már hat db) konstrukció felsorolását előíró *d* feladattal az *a* magasan korrelál: $r_{ad}=0,64$. Magas még az *a* feladat korrelációja a szintén kételemű konstrukciók felsorolását kívánó *d* feladattal is: $r_{ad}=0,59$.

A feladatok és a formális szubtesztek korrelációit a 16. táblázat tartalmazza. Az együttthatók többnyire magasak, bár előfordul néhány nem szignifikáns érték is. A nagyon alacsony r értékek a "KOMBINÁLÁS" teszt feladataival kapcsolatosak. A feladatoknak a formális tartalom összeteljesítményével való korrelációi mind magas értékek, a legalacsonyabb is 0,41. A formális tartalom összevont mutatójával a legmagasabban a DSZ és az ISV feladatai korrelálnak, ugyancsak magas az INV némely feladatának korrelációs együttthatója is. Ez esetben az ÖIV feladatainál nem tapasztaltunk különösen magas korrelációkat, így tehát a manipulatív tartalomnál megfigyelt tendencia nem általánosítható.

A feladatok és a kombinatív képesség közötti korrelációs együttthatók mindegyike szignifikáns még 0,1%-os szinten is. A legszorosabb összefüggést a DSZ *f* feladatainál találtuk ($r=0,58$), ugyancsak szoros a kombinatív képességgel való kapcsolat a DSZ *c* és az ISV *e* feladatok esetében is ($r=0,54$). Legalacsonyabb az összefüggés az INK *b* és az ISP *a* feladatoknál ($r=0,22$), továbbá az INK *a* ($r=0,23$) és az ÖIV *a* ($r=0,26$) feladatnál. E szélső értékeken túl is jellemző az a tendencia, hogy a szubteszt első feladatai alacsonyabban, az utolsó feladatok pedig magasabban korrelálnak. Nem szabad azonban hagyni, hogy a jelenség megtévesszen bennünket, ugyanis két, pusztán számítástechnikai ok is lehet, amely e tendenciát előidézheti vagy erősítheti. Az egyik ok lehet: ha a szubteszt első feladatainak kisebb, esetleg túl kicsi a varianciája, eleve alacsonyabb korrelációkra számíthatunk. A 13. és 14. táblázat szórásadatai szerint ezt az okot kizárhatjuk. A másik tényező az lehet, hogy a több konstrukciót képző feladatok nagyobb súllyal vesznek részt az összpontszám kialakításában. Mivel azonban a kombinatív képesség tesztjein összesen elérhető 1035 ponthoz képest egy feladat legfeljebb 10-15 pontos hozzájárulása arányaiiban nagyon kicsi, a korrelációk nagyságbeli arányainak jelzett tendenciáit ez az ok sem magyarázhatja teljes mértékben. Végiggondolva tehát a technikai torzítások lehetőségeit is, érvényesnek és lényeginek tekinthetjük a bonyolultabb feladatok szorosabb kapcsolatait a kombinatív képesség összpontszámával.

16. táblázat. A formális feladatok korrelációi

Feladat		Formális szubtesztek								F	Kombinatív képesség
		DSZ	ISV	INV	ÖIV	ISK	INK	ISP	ÖRH		
Descartes-féle szorzatok képzése	a	82	51	38	30	25	29	31	15	64	50
	b	85	50	37	30	27	30	33	16	65	51
	c	89	54	41	33	28	30	38	16	69	54
	d	85	57	45	37	27	39	44	16	72	53
	e	86	57	43	38	23	36	41	18	72	48
	f	86	61	50	40	29	42	48	17	77	58
Ismétléses variációk képzése	a	41	67	55	33	17	19	30	08	55	40
	b	58	86	69	51	31	35	50	18	77	33
	c	52	85	63	39	20	29	41	13	68	42
	d	61	92	76	45	22	28	44	15	76	51
	e	56	85	61	50	37	33	50	23	76	54
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	37	64	78	37	15	18	34	10	55	35
	b	34	57	72	22	14	13	27	05	48	32
	c	45	69	93	37	19	26	39	12	65	48
	d	52	75	96	38	17	25	44	12	70	50
Az összes ismétléses variáció képzése	a	22	33	21	74	22	20	28	19	44	26
	b	41	49	39	89	28	32	41	23	66	39
	c	33	46	33	86	32	29	41	28	58	38
	d	39	48	36	93	31	30	42	22	62	38
Ismétléses kombinációk képzése	a	41	46	36	45	25	38	32	26	61	41
	b	19	14	10	24	03	36	15	25	42	28
	c	31	20	13	33	74	45	28	33	48	33
	d	40	40	30	46	31	45	39	32	65	43
	e	30	29	19	36	24	42	28	33	56	38
	f	40	38	29	46	30	46	33	34	66	39
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	29	16	08	19	15	78	22	23	41	23
	b	30	19	10	21	16	86	18	21	44	22
	c	37	30	22	30	20	90	32	25	57	30
	d	37	35	26	31	19	88	38	27	60	35
	e	42	39	33	34	19	81	45	21	62	37
Ismétléses permutációk képzése	a	27	33	31	30	16	27	66	11	41	22
	b	35	46	37	34	15	33	80	10	54	33
	c	41	43	31	41	16	29	92	15	56	43
	d	50	51	41	44	26	41	92	20	67	48
Az összes részhalmaz képzése	a	32	30	19	45	23	39	26	41	52	34
	b	24	21	07	37	16	43	22	92	50	31
	c	31	30	17	45	24	45	32	56	57	37

Megjegyzés: Helykímélés érdekében a táblázatban a 0-át és a tizedesvesszőt elhagytuk.

A formális feladatok klaszteranalízisének eredményéről elmondhatjuk, hogy ez esetben "szép", anomáliáktól mentes, tiszta hierarchiát kaptunk (27. ábra). Ezt valószínűleg e feladatok homogén, a strukturális viszonyokat nem befolyásoló jellegének köszönhetjük. A betűkből, jelekből, számokból képzett konstrukciók felsorolásait nem befolyásolták a tartalomra vonatkozó konkrét képzetek, a feladatok strukturális tényezői tisztábban érvényesülhettek.

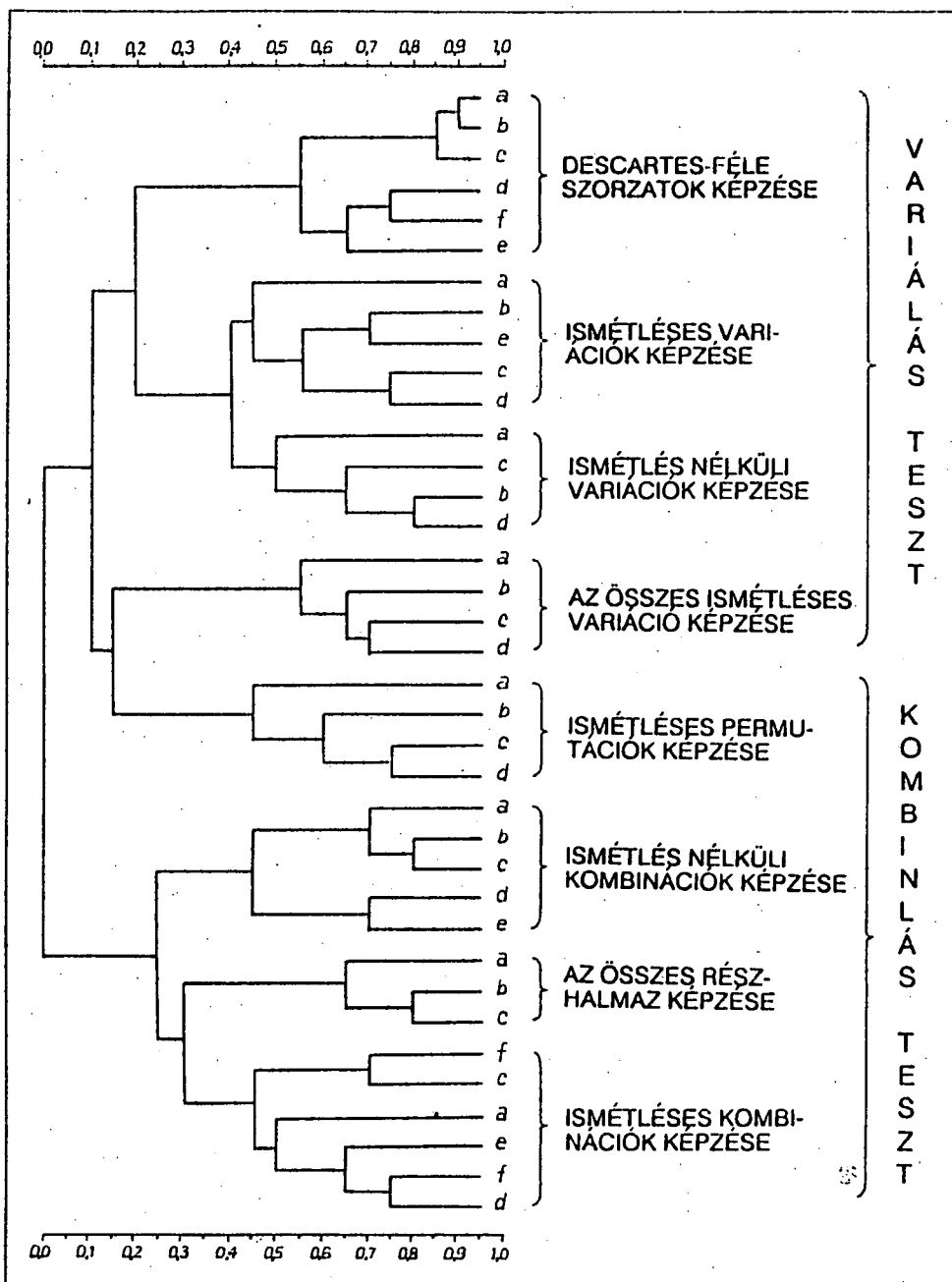
A feladatrendszer két egymással össze nem függő osztályra esik szét. Az egyikbe a DSZ, ISV, INV, ÖIV és az ISP szubtesztek feladatai tartoznak. Ezek közös jellemzője, hogy a konstrukciókban az elemek sorrendjének is szerepe van. A másik csoportba az ISK, INK és az ÖRH feladatai tartoznak, melyeket az jellemez, hogy a csak az elemek sorrendjében különböző konstrukciók ekvivalensnek számítanak.

Az első csoport öt szubtesztje az $r=0,1$ szinten két részre oszlik. A DSZ, az ISV és INV közös osztályba sorolódása strukturális hasonlóságuk alapján értelmezhető, és megfelel a kiinduló modellünkben felvázolt kapcsolatrendszernek. Hasonlóképpen értelmezhető az ismétléses és ismétlés nélküli variációk szubtesztjeinek szorosabb összefüggése. Az ÖIV és az ISP feladatai az előző három szubteszt feladatainál összetettebbek, lazább kapcsolatukat és helyüket a hierarchiában ez kielégítően magyarázza.

Az INK, ÖRH, ISK szubtesztek feladataiban egyaránt kombinációkat kell képezni. Ez magyarázza, hogy még az előző csoportnál is szorosabban összetartoznak, csak az $r=0,25$ szinten válnak két részre. Érdekes viszont, hogy az ÖRH szubteszt itt is inkább az ismétléses kombinációk, nem pedig az ismétlés nélküli kombinációk képzéséhez kapcsolódik, holott az összes részhalmaz képzése nem más, mint az összes különböző elemszámú ismétlés nélküli kombináció képzése.

A formális tartalmú tesztek belső összefüggéseinek már említett jellegzetessége az, hogy a szubtesztek feladatai nem keverednek össze. Vagyis előbb az azonos szubteszthez tartozó feladatok kapcsolódnak egy osztállyá, és majd csak ezek az osztályok egyesülnek nagyobb egységekké. Mégpedig a szubteszt-feladatok belső kapcsolatai meglehetősen szorosak, és (az ISV szubtesztet kivéve) legalább $r=0,1$ szinttel eltérnek a következő osztály kapcsolódási szintjétől.

Érdekes a szubtesztek feladatainak belső strukturálódása is. Megfigyelhető, hogy a feladatok bonyolultságuk, mégpedig elsősorban a konstrukciók hossza szerint tartoznak szorosabban össze. Pontosan követi például a DSZ feladatainak kapcsolata a feladatok struktúrájának hasonlóságait. Először az *a* és *b* feladatok (kevés, kételemű konstrukció) kapcsolódnak, majd hozzájuk a *c* (sok kételemű konstrukció) feladat. Hasonlóan a *d-f* (három- és négyelemű), majd az *e* kapcsolódása is megfelel a struktúrának. Ugyanilyen jól értelmezhető az ISV feladatainak belső struktúrája, vagy a lépcsőzetesen bővülő osztályokból felépülő INV, ÖIV, ISP, ÖRH is.



27. ábra
A formális feladatok klaszteranalízise

A feladatok közötti kapcsolatok elemzésének befejezéseként utalnunk kell arra a jelenségre, amelyet a fejlődési folyamatok elemzése során megfigyelhettünk: a feladatok teljesítmény-rangsora az életkor változásával megváltozhat, feladatok nehézségi viszonyai felcserélődhetnek, ami azt jelzi, hogy a fejlődés nem csupán mennyiségi növekedés, hanem a strukturális változások is szerepet játszanak. A feladatok klaszteranalízisét a 14 éves minta adatai alapján végeztük, lényegében tehát kivetítettük a struktúra fejlődésének egy adott állapotát. Valószínűnek tűnik, hogy más életkorban elvégezve az összefüggésvizsgálatokat, többé-kevésbé eltérő kapcsolatrendszert kapnánk. A kombinatív képesség kutatásának egyik izgalmas további feladata e strukturális átalakulások nyomon követése.

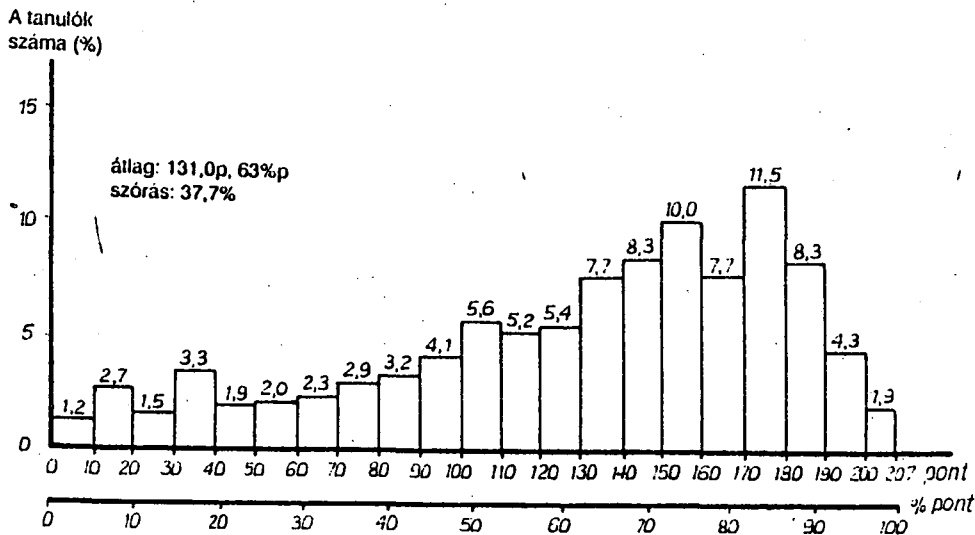
7.5 A formális teljesítmények összefoglaló jellemzése

Az előző két fejezetben alkalmazott sorrendet követve itt is a tesztek eredményeinek eloszlását elemezzük először. A 28. és 29. ábrán a 14 éves minta eredményeinek eloszlását szemléltetjük. A hisztogramokat összehasonlítva azonnal látható, hogy a két teszt külön kezelése indokolt, két teljesen különböző eloszlást kaptunk.

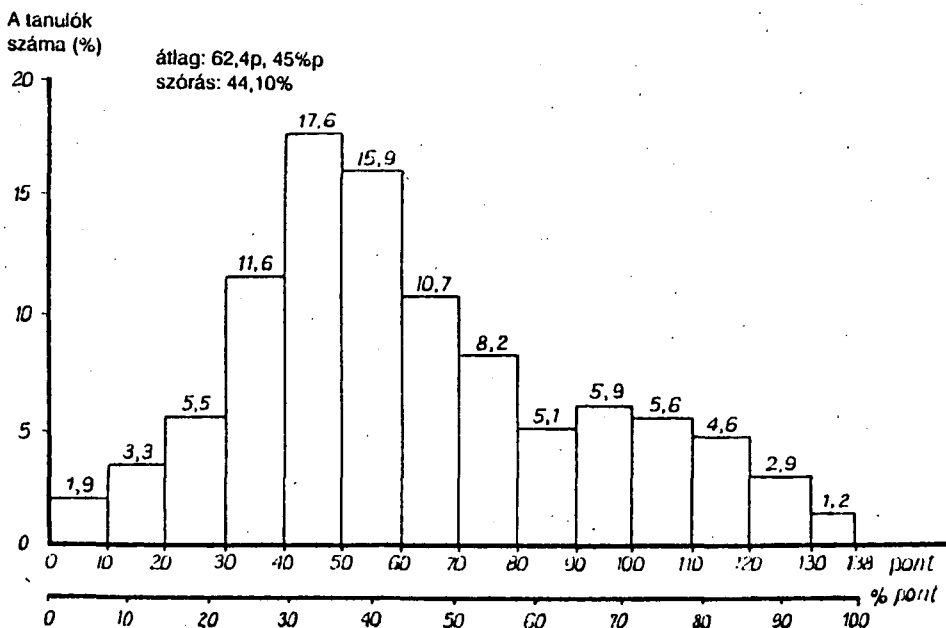
A "VARIÁLÁS" teszt átlaga 63%p, az eloszlás lapos, 38%-os relatív szórással jobbra aszimmetrikus. A módusz a 85%p körüli értékre esik. Mind a legkisebb, mind a legnagyobb teljesítményosztályba viszonylag kevés tanuló esik. Két tanuló a teljes tesztet hibátlanul oldotta meg.

A "KOMBINÁLÁS" teszt átlaga 45%p, relatív szórása 47%. Az eloszlás balra aszimmetrikus, némileg csúcsosabb a másik teszt eloszlásánál. A módusz helye kb. a 35%-ra esik. Az eloszlás mindkét vége ellaposodik, a legkisebb és a legnagyobb teljesítményosztályhoz egyaránt kicsi gyakoriság tartozik. Egy tanuló volt csupán a mintában, aki a tesztet hibátlanul oldotta meg.

A kombinatív műveleti képesség formális feladatokban megnyilvánuló teljesítményeit jellemző mutatónak, a két teszt összegzett eredményének eloszlását a 30. ábra szemlélteti. Az átlag 55%p, a relatív szórás 38%. Az eloszlás lapos, közel szimmetrikus normális eloszlásra emlékeztet. A formális feladatok megoldásának képességéről összegzésként elmondhatjuk, hogy 14 éves korra átlagosan körülbelül a teljes fejlettségnek a felét éri el. Ezen belül nagy különbségek vannak a tanulók között. Ha a 80%p fölötti teljesítményekre mondjuk azt, hogy az már a képesség teljes fejlettségét jelzi, akkor a tanulóknak kb. 10%-a érte el ezt a szintet.

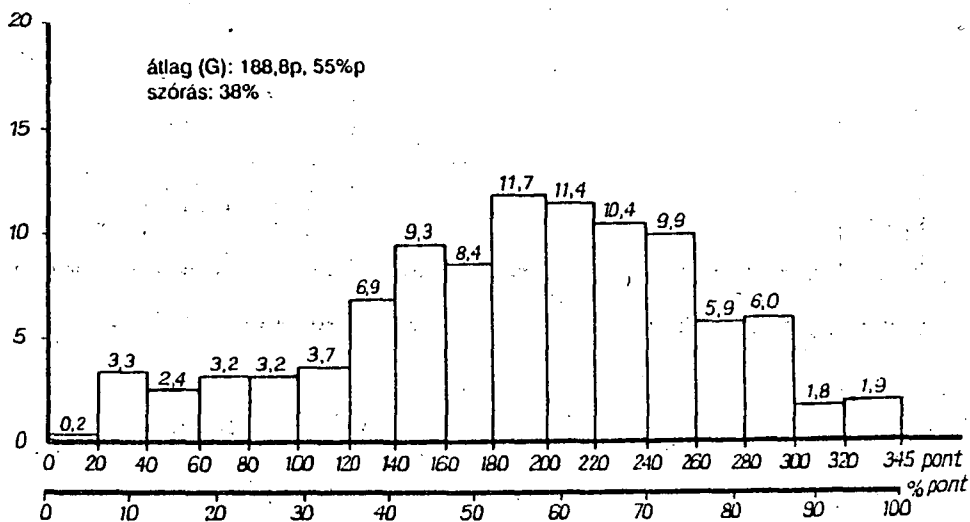


28. ábra
A formális "VARIÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása



29. ábra
A formális "KOMBINÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása

A tanulók
száma (%)



30. ábra
A formális teljesítmények eloszlása

8. A KOMBINATÍV MŰVELETI KÉPESSÉG MINT EGÉSZ

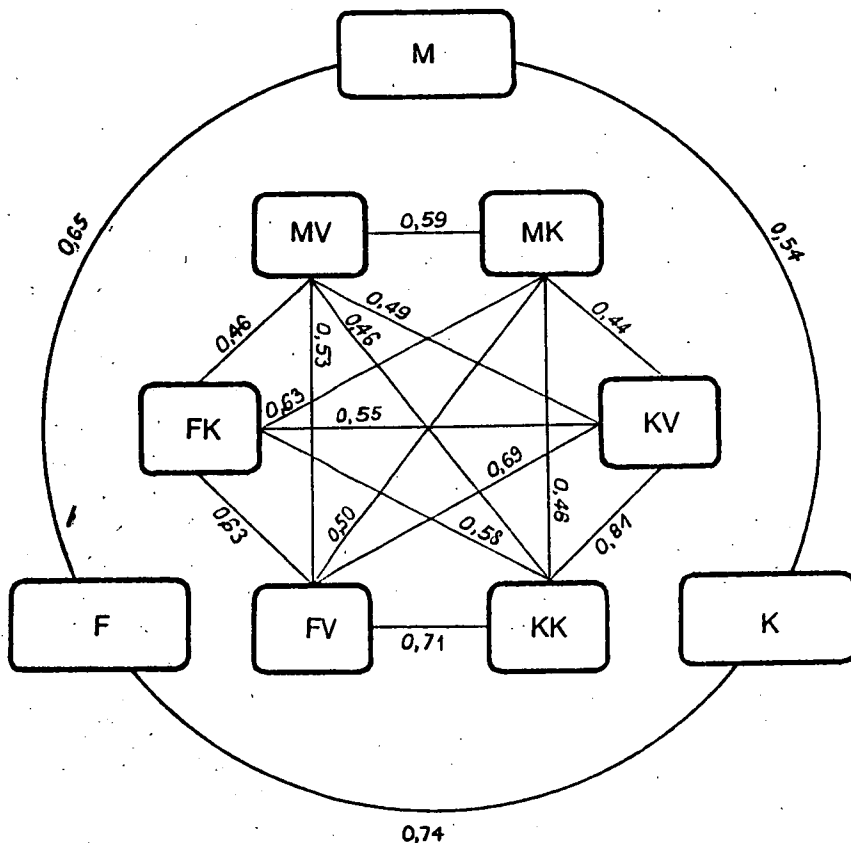
Az előző fejezetekben az empirikus vizsgálat legkisebb önálló egységeinek, a feladatoknak az adataiból indultunk ki, és így haladtunk elemzésünkben a részekről az egész felé. A legnagyobb egység, amellyel még foglalkoztunk, az azonos tartalommal készített teljes feladategyüttes volt. Néhány összehasonlítás után azonban nem elemeztük a különböző tartalmú feladatok közötti kapcsolatokat, és a teljes feladatrendszert átfogó összefüggéseket.

Ebben a fejezetben a kombinatív műveleti képesség egészével foglalkozunk, a nagyobb, átfogó összefüggésekre koncentrálunk, elemzéseinkhez a teljes vizsgálati anyagot felhasználjuk. E megközelítés mellett azonban adatainkat még mindig nagyon sok szempont szerint elemezhetjük. Az adatok felvételekor eleve a többdimenziós megközelítést alkalmaztuk, ezért az igazán érdekes összefüggéseket a többszemponutú elemzésektől várhatjuk. Ezért, mint leginkább fontosat, kiemelhetjük a struktúrát, a tartalmat, az életkort, és mindezek függvényében a teljesítményszintet, mint elemzési szempontot; vagy használhatjuk ezeket együtt is, a legkülönbözőbb kombinációkban. Gyakorlatilag azonban 2-3 szempontonál több egyidejű érvényesítése áttekinthetetlené teszi az összefüggéseket, megnehezíti a lényeges és lényegtelen megkülönböztetését. Mindezeket tekintetbe véve a kombinatív műveleti képesség egészének elemzésében azt a megoldást választjuk, hogy egy-egy szempontot mint központi problémát kiemelünk, de elemzéseinkbe további dimenziókat is bevonunk.

8.1 A kombinatív képesség struktúrája

Ebben a részben a struktúrát helyezzük vizsgálódásaink fókuszába. Gondolatmenetünk az egésztől a részek, a nagyobbtól a kisebb egységek felé haladás elvét követi. A kombinatív műveleti képesség egésze után a legnagyobb önállóan értelmezhető egységek a manipulatív (M), a képi (K), illetve a formális (F) tartalommal készített feladatok összpontszámai. Ezeknél kisebb,

de ugyancsak önálló egységnek foghatjuk fel az egyes tartalmakhoz tartozó két-két tesztet. Kiszámítottuk az így definiált egységek közötti korrelációs együtthatókat, az eredményt a 31. ábrán szemléltetjük. Az előző fejezetekben tárgyalt összefüggésvizsgálatok alapján már várható volt, hogy itt is szoros kapcsolatokat fogunk találni. Az ábrán feltüntetett valamennyi korrelációs együttható szignifikáns és valóban magas.



31. ábra

A különböző tartalmú feladatrendszerek és tesztek összefüggései

Az azonos tartalmú feladatok összpontszámai közötti kapcsolatok nem a várokozásnak megfelelően alakultak. Ha ugyanis a manipulatív – képi – formális sorrendet tekintjük, ennek alapján az M-K és az K-F között közelebbi, az M-F között pedig távolabbi kapcsolatot várhatunk. Nos, ez a feltételezés nem bizonyul igaznak. Amint a 31. ábráról leolvasható, a manipulatív és a formális tartalom között szorosabb kapcsolatot találtunk, mint a manipulatív és a képi között.

A három korrelációs együtttható közül a $r_{MK} = 0,54$ a legkisebb, ezt követi nagyság szerint az $r_{MF} = 0,65$, végül a legnagyobb az $r_{KF} = 0,74$ együtttható értéke.

Ezt a kapcsolatrendszert többféleképpen interpretálhatjuk. Az egyik megoldás szerint megtartjuk a hierarchikus sorrendre vonatkozó hipotézist, ekkor azonban fel kell tételeznünk, hogy a képi tartalmú feladatrendszer nem a megfelelő absztrakciós szinten áll, hanem a manipulatív szinttől még távolabbi absztrakciót képvisel, és így mérőeszközeinkre a M-F-K sorrenddel jellemezhető hierarchia érvényes. Ezt a megközelítést további tények nem indokolják. Bár vannak jelek, amelyek szerint bizonyos képi szubtesztok eredményei eltérnek az alapvető tendenciától, ez az eltérés azonban az itt feltételezett sorrenddel éppen ellentétesre utalna: néhány képi szubteszt esetében a teljesítmények magasabbak, mint a manipulatív megfelelőknél.

Az értelmezés másik lehetősége szerint elvetjük az M-K-F hierarchikus sorrendre vonatkozó hipotézist, és a továbbiakban nem tételezünk fel a három tartalom között olyan különbségeket, amelyek a megfelelő teljesítményeket determinálják. A három különböző tartalmat nem tekintjük különböző absztrakciós szintűnek, illetve nem tartjuk szükségesnek, hogy ez egyben a műveleti képességek működését, illetve a feladatokban nyújtott teljesítményeket erősen befolyásolja, azok empirikus nehézségének bármilyen sorrendjét determinálja. A különböző absztrakciós szintű tartalmakat a képesség működése szempontjából egyenrangúként kezeljük, amit a szintek 31. ábra szerinti elrendezésével is érzékeltethetünk. Ebbe az értelmezésbe is beilleszthetjük a képi tartalom rendellenes viselkedését: a manipulatívtól az arányosnál kissé távolabb, a formálishoz kissé közelebb helyezkedik el. Eredményeink ez utóbbi értelmezést valószínűsítik. Amint a 8.3 pontban alaposabb elemzéssel is kimutatjuk, a műveletek működésének eredményessége nem követi az M-K-F hierarchikus sorrendet.

A három tartalom feladatai struktúrájukat tekintve pontosan megegyeznek, a háromféle tartalommal ugyanazt a műveletrendszert kívántuk vizsgálni. Bár a tartalom hatásától (mint később ezt részletesen is megvizsgáljuk) nem tekinthetünk el, e korrelációs együttthatókat a reliabilitás mérlegeléséhez is felhasználhatjuk. Nagyon sok képességtesztet publikálnak illetve használnak széles körben lényegesen gyengébb reliabilitási mutatókkal (ld. pl.: Greer, 1983, Williams, 1983).

A tesztek közötti korrelációs együttthatók közül a manipulatív "VARIÁLÁS" és a képi "KOMBINÁLÁS" tesztek közötti a legkisebb: $r_{MK-KV} = 0,44$. Az előzőek alapján a leglazább kapcsolatot valóban az MV-KK vagy az MK-KV tesztek között várhatjuk. Ennek megfelelően az $r_{MV-KK} = 0,46$ is a legalacsonyabb korrelációk közé tartozik.

Egymáshoz "közeli" teszteket többféle módon is kereshetünk: a struktúra megegyezése vagy a tartalom megegyezése alapján. Empirikus kérdés marad,

hogy melyik szempont hozza valóban közel egymáshoz a tesztek közötti viszonyt, hogy pontszámaik szorosan együtt járnak. Nos, a legmagasabb korreláció a képi tartalom két tesztje között van: $r_{KV-KK}=0,81$. Ez igen magas érték, tekintve, hogy a két teszt különböző struktúrák fejlettségét vizsgálja.

A két tesztet felfoghatjuk úgy is, mint a képi tartalom vizsgálatának két féltesztjét. Bár a két "féltesztbe" nem véletlenszerűen kerültek feladatok, hanem nagyon is tendenciózusan megválogatva, talán mégis érdemes megnézni, mekkora a tesztfelezés alapján számított reliabilitási mutató. A *Spearman-Brown formula* alapján $r_{rel}=0,895$ érték adódik, ami még homogén tesztekénél is elfogadható. (Hasonlóképpen manipulatív tartalomnál $r_{rel}=0,742$ és formális tartalomnál $r_{rel}=0,773$.)

Említésre méltó még az FV teszt magas korrelációja a képi tartalom mindkét tesztjével. A K-F szintek közötti szoros kapcsolatot nagyrészt ez a teszt létesíti, ugyanis az FK teszt a KV-vel csak 0,55, a KK-val 0,58 szinten korrelál.

A következő kisebb egységek, amelyeknek a kapcsolatait még érdemes megvizsgálunk, a szubtesztek lesznek. Mindhárom tartalomra 8 szubtesztünk van, összesen tehát 24. E 24 szubteszt kapcsolatrendszerét kifejező korrelációs mátrixot a 17. táblázat tartalmazza.

A korrelációs mátrix elemzését kétféle megközelítésben is elvégezhetjük. Egyrészt megnézhetjük, hogy a műveletek teoretikusan felállított rendszerének mennyiben felelnek meg a korrelációk empirikus adatai. A másik megközelítésben a műveletek empirikusan adódó rendszerét keressük.

A 32. ábrán tartalmanként vizsgáljuk a szubtesztek kapcsolatrendszerét. Az ábrán a szubtesztek abban az elrendezésben szerepelnek, ahogy a műveletek hipotetikus rendszerét ábrázoltuk, tehát az 1. ábrával közvetlenül összehasonlíthatók. Az áttekinthetőség kedvéért az $r=0,4$ -nél alacsonyabb összefüggéseket nem jelöltük be, az összehasonlíthatóság érdekében mindhárom tartalomnál egységesen ezt a határt szabtuk meg.

A legszorosabb belső összefüggésrendszerrel természetesen itt is a képi tartalomnál találkozunk. Lazább kapcsolatok adódnak a formális tesztekkel, és a legkevésbé szoros összefüggéseket a manipulatív tartalomnál találjuk.

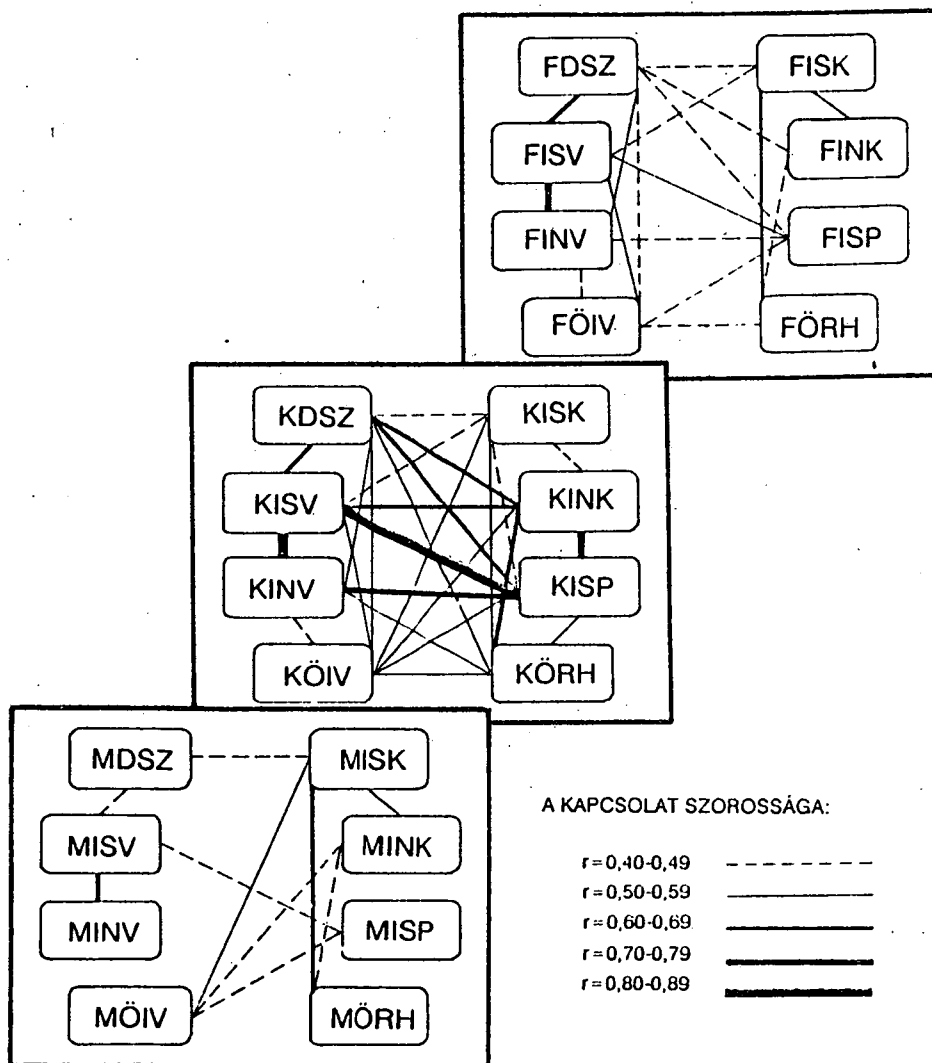
A manipulatív szubtesztek viszonylag laza kapcsolatain túl a legfeltűnőbb az, hogy az összes ismétléses variáció képzése minden ábrázolt kapcsolatával a "KOMBINÁLÁS" teszt szubtesztjeihez kötődik. Az ismétléses permutációk képzésével a helyzet fordított, azt mindkét korreláció a "VARIÁLÁS" egy-egy szubtesztjéhez kapcsolja. Úgy tűnik tehát, hogy e két szubteszt (ÖIV-ISP) felcserélésével homogénebbé válik a két teszt is. Érdemes még felhívni a figyelmet az ismétlés nélküli variációk képzése közötti szoros kapcsolatra, valamint arra, hogy az összes részhalmaz képzése szorosabban kapcsolódik az ismétléses kombinációk képzéséhez, szemben azzal, amit várunk, vagyis hogy az ÖRH-INK között erősebb az összefüggés.

17. táblázat. A szubtesztek közötti korrelációs együtthatók

	Manipulatív szint							Képi szint								Formális szint							
	ISV	INV	ÖIV	ISK	INK	ISP	ÖRH	DSZ	ISV	INV	ÖIV	ISK	INK	ISP	ÖRH	DSZ	ISV	INV	ÖIV	ISK	INK	ISP	ÖRH
MDSZ	41	28	34	40	38	33	30	36	37	36	22	21	34	35	28	33	28	27	22	19	27	26	20
MISV		66	30	21	18	41	19	19	20	23	28	12	23	23	20	26	35	31	19	18	18	27	11
MINV			19	12	08	34	10	11	11	14	15	06	13	12	11	18	26	25	10	05	10	20	08
MÖIV				54	44	44	62	45	40	38	42	37	48	44	35	45	36	31	41	43	40	41	40
MISK					56	31	68	36	26	23	32	29	40	30	26	40	29	23	35	44	46	33	40
MINK						38	47	30	24	22	25	16	32	27	20	34	21	21	20	32	40	31	30
MISP							21	33	32	33	37	22	36	34	32	29	35	37	24	26	29	29	22
MÖRH								30	23	21	30	28	32	27	23	33	22	17	30	40	38	34	44
SDSZ									61	57	56	45	63	60	55	55	56	47	50	45	58	46	58
SISV										86	51	44	67	85	55	48	52	45	47	45	37	46	32
SINV											47	39	63	78	50	43	46	44	41	39	32	41	28
SÖIV												50	55	53	57	47	53	45	46	43	34	50	35
SISK													49	43	51	35	43	33	40	38	24	37	34
SINK														70	60	56	58	53	45	47	43	56	38
SISP															53	52	51	43	45	45	44	52	35
SÖRH																46	54	43	44	41	29	47	30
FDSZ																	65	51	41	43	42	48	31
FISV																		77	53	40	35	52	29
FINV																			40	29	25	44	15
FÖIV																				49	33	45	45
FISK																					53	37	66
FINK																						38	47
FISP																							30

Megjegyzés: Helykímélés érdekében a táblázatban a 0-át és a tizedesvesszőt elhagytuk.

A képi és formális szubtesztek összefüggésrendszerében is megjelennek, sőt többé-kevésbé dominálnak is azok a kapcsolatok, amelyeket a manipulatív tartalomnál találtunk.



32. ábra

Az azonos tartalmú szubtesztek kapcsolatainak összehasonlítása

A képi szubtesztek esetében figyelemre méltó, hogy itt a korrelációk eleve magasabb szintjén túl a kapcsolatok szorosságának empirikus arányai nagyon közel állnak az elméletileg várhatóhoz. Például itt (ellentétben a két másik tartalommal) igen szoros kapcsolat van az INK és az ISP között. Ezt az összefüggést azért tételeztük fel, mert mindkettő halmazok rendezett partíciójaként fogható fel. Ugyancsak szoros összefüggés adódott az ÖRH és az INK között, megfelelően annak, hogy az összes részhalmaz képzése az összes különböző elemszámú ismétlés nélküli kombináció képzését jelenti. Ez az összefüggés erősebb ($r=0,60$), mint az ÖRH-ISK közötti ($r=0,51$). A két teszt közötti szoros kapcsolatnak megfelelően sok a jobb és bal oldalon ábrázolt szubteszteket összekötő magas korreláció. Ebből a szempontból a DSZ, az ISV, az INV és az ISP emelkedik ki.

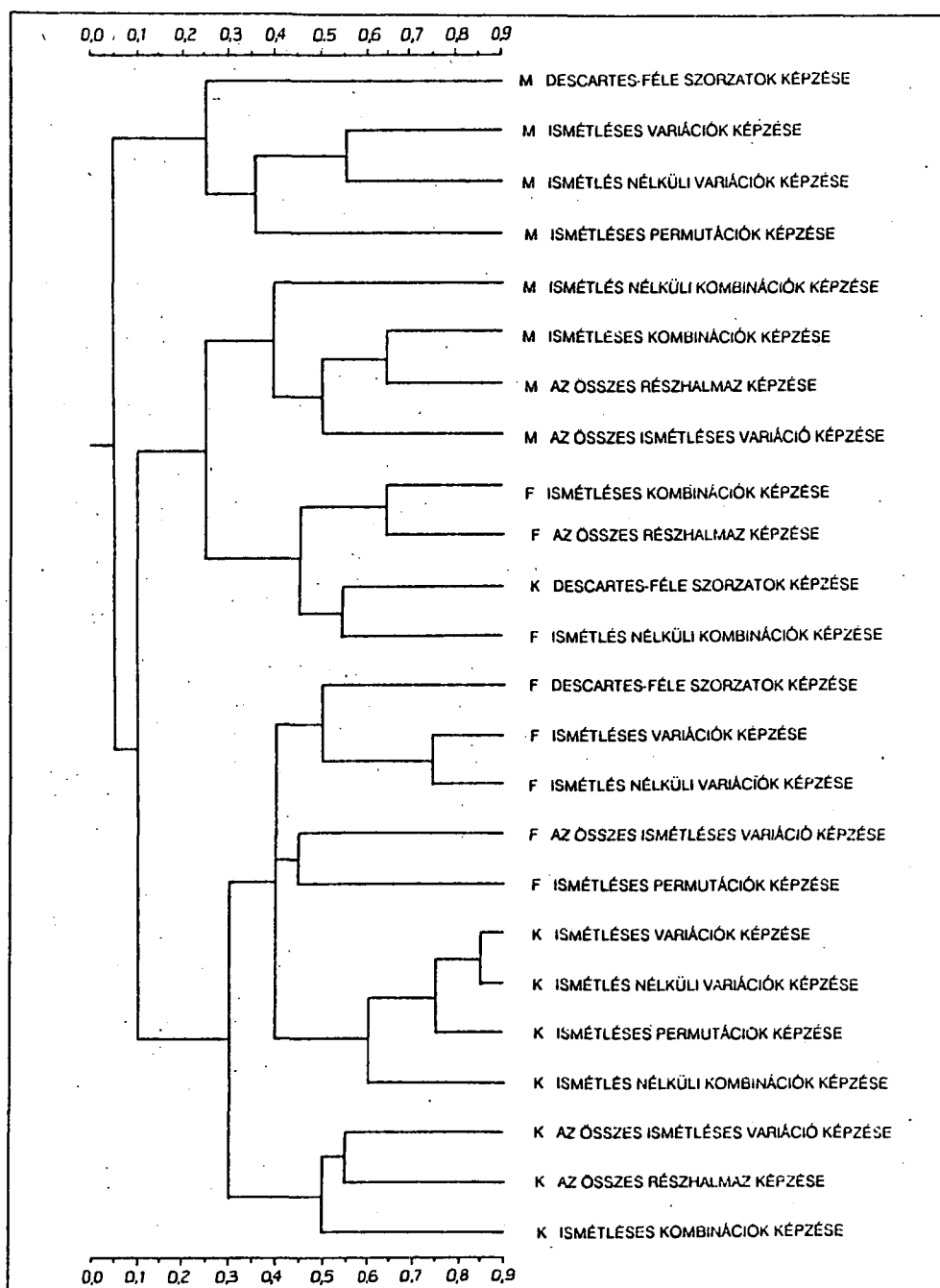
A formális szubtesztek magasabb korrelációi a manipulatív szubteszteknél tapasztaltnál hasonló kapcsolatrendszerrel jeleznek.

A szubtesztek korrelációs mátrixát felhasználva elvégeztük a klaszteranalízist. Eredményét a 33. ábrán szemléltetjük. Míg az előző ábrán csak az azonos tartalmú szubtesztek összefüggéseit tüntettük fel, itt a tartalmak közötti kapcsolatokat is felhasználtuk. A korrelációs mátrix legalacsonyabb értéke 0,05 (a MINV és a FISV között), ezért a szubtesztek halmaza nem esik szét független osztályokra.

A szubtesztek az $r=0,05$ szinten bomlanak először két osztályra, pontosabban a négy összekapcsolódó manipulatív szubteszt elkülönül a többitől. E négy szubteszt (MDSZ, MISV, MINV, MISP) közös tulajdonságát, azon túl, hogy a manipulatív tartalmat képviselik, könnyű megtalálni: mind a négyenl számít a konstrukciók elemeinek a sorrendje.

A további 20 szubtesztet magában foglaló osztály strukturálódásában nem érvényesülnek egyértelműen általános alapelvek, mind a különböző tesztekbe, mind pedig a különböző tartalmakhoz tartozó szubtesztek keverednek. Viszonylag könnyen értelmezhető a manipulatív tartalom további négy szubtesztjének egy osztályba sorolódása, bár ennek a csoportnak a további belső tagozódásában a már korábban elemzett anomáliák jelentkeznek. A hozzájuk kapcsolódó, négyes csoportban három szubteszt a formális, egy pedig a képi tartalmat képviseli. Itt a KDSZ és az FINK képez egy párt, csupán ez az egy olyan osztály fordul elő a hierarchiában, ahol a különböző tartalmú szubtesztek közötti kapcsolat szorossága meghaladja az azonos tartalmúak közötti kapcsolatot.

A dendrogram alsó felén ábrázolt, 12 szubtesztből álló osztályban kettes, hármas és négyes csoportosulások vannak, amelyeken belül már csak azonos absztrakciós szintűek fordulnak elő. A formális "KOMBINÁLÁS" teszt első három szubtesztjének (FDSZ, FISV, FINV) kapcsolata teljes mértékben megfelel az elméleti megfontolásoknak. A FÖIV és a FISP nem függ túl szorosan össze, egy párba kerülésüknek inkább csak számítástechnikai okai lehet-



33. ábra
A szubtesztek klaszteranalízise

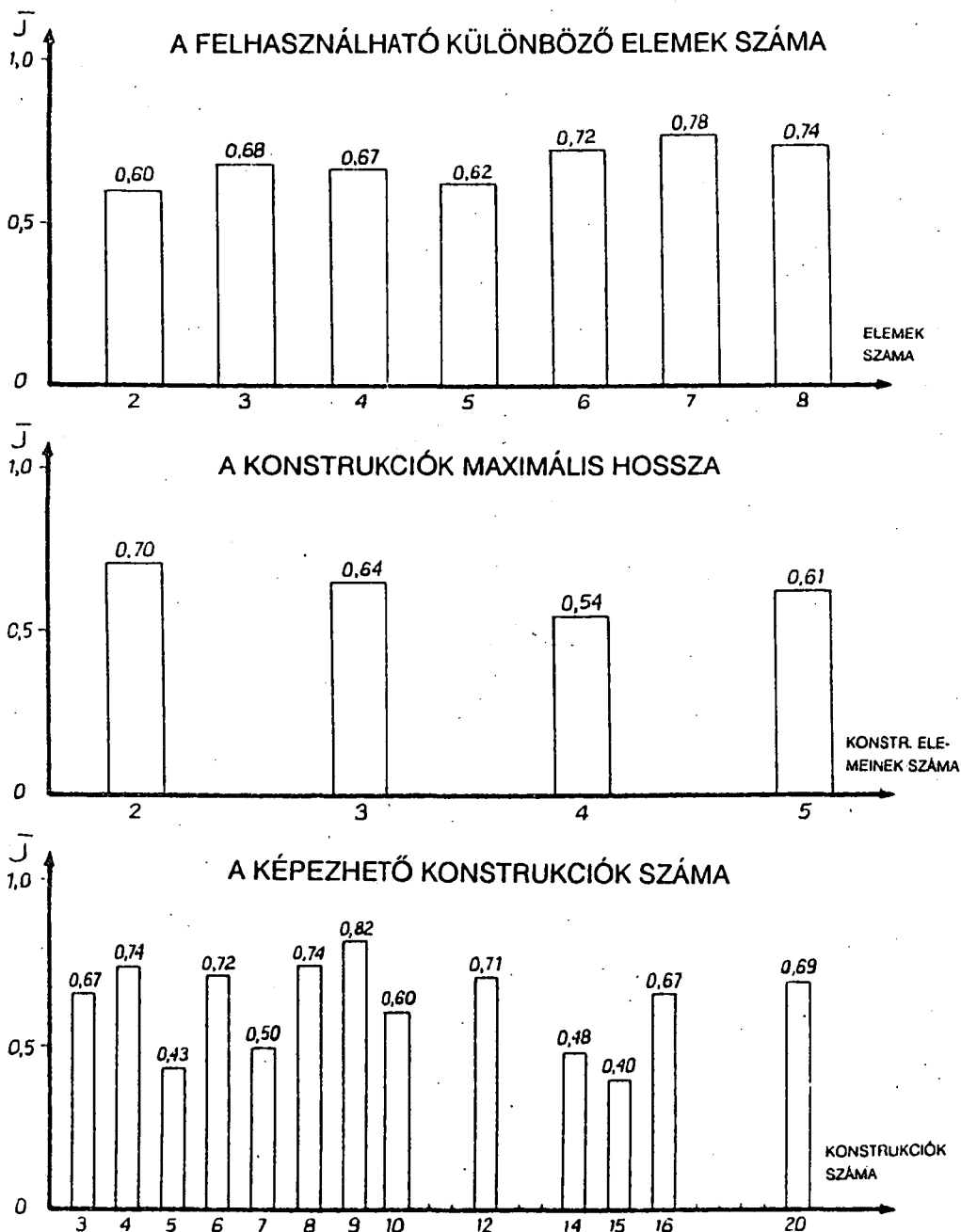
nek. A következő négyes két első tagjának (KISV-KINV) szoros kapcsolata triviális, könnyen értelmezhető a KISP hozzájuk kapcsolódása is ("számít a sorrend"). A KINK viszont valószínűleg a KISP-hez való kapcsolatán ("rendezett partíciók") keresztül került e csoportba. A KÖIV és KÖRH összefüggésének magyarázata az, hogy mindkét szubtesztben különböző hosszúságú konstrukciókat kell képezni, a KISK hozzájuk kapcsolódása már kevésbé értelmezhető.

Amint láttuk, a szubtesztek empirikus kapcsolatrendszerében nagyon sok olyan mozzanatot találtunk, amelyik az elméleti modellt megerősíti, találtunk néhány olyan összefüggést, amely bizonyos pontokon a hipotetikus struktúra módosítását igényli, és van meglehetősen sok olyan összefüggés is, amely vizsgálatunk problémakörén, fogalomrendszerén és előfeltevésén belül nem értelmezhető. Figyelembe kell azonban venni a vizsgált jelenség komplexitását, illetve a vizsgálati eszközöknek e komplexitáshoz viszonyított egyszerűségét. Nem várható tehát, hogy a gondolkodás bonyolultságát néhány dimenzióba sűrítő modell a kérdéses jelenségeket minden tekintetben pontosan írja le. Mindezek alapján elmondhatjuk, hogy a kombinatív művelési képesség struktúrájáról első megközelítésként kielégítő, a további vizsgálatoknak irányt mutató modellt kaptunk. Meg kell jegyeznünk azt is, hogy a felhasznált egyszerű statisztikai apparátus nem feltétlenül alkalmas a mélyebb strukturális viszonyok elemzésére. Adatainkat további, speciális módszerekkel feldolgozva az itt felvázolt kép nagymértékben finomítható. A további elemzés lehetőségeire a struktúra és a tartalom kölcsönhatásának vizsgálata kapcsán mutatunk néhány példát.

A strukturális elemzések során még egy problémára érdemes kitérnünk, mégpedig a feladatok struktúrájának, illetve az azt egyik oldalról meghatározó mennyiségi viszonyoknak a kérdésére.

Amint a tesztek feladatstruktúrájának megszerkesztésekor már említettük, a feladatokhoz három mennyiségi jellemzőt rendelhetünk: a felhasználható különböző elemek (kiinduló elemek) száma, a konstrukciók (maximális) hossza, valamint az előállítható konstrukciók száma.

A feladatok eredményeinek, illetve a feladatok empirikus kapcsolatrendszerének elemzése során néha azt találtuk, hogy a feladatok bizonyos numerikus jellemzőinek megegyezése vagy egymáshoz közel állása a teljesítményszintek hasonlóságára vagy a szoros kapcsolatra szolgálhatott magyarázatul. Érdekes tehát megvizsgálunk, hogy a feladatokra jellemző numerikus értékek vajon hogyan befolyásolják a teljesítményeket. Ennek érdekében a 111 feladatot az említett számszerű jellemzők szerint csoportosítottuk, és kiszámítottuk az e csoportokba tartozó feladatokban elért teljesítmények átlagát (a J értékeket véve alapul). Számításunk eredményét a 34. ábrán szemléltetjük.



34. ábra

A feladatok eredményei a feladatok mennyiségi jellemzőinek függvényében

Amint az ábráról leolvasható, a feladatok számszerű jellemzői hatnak ugyan a megoldás eredményességére, de önmagukban korántsem olyan mértékben, mint az a korábban elemzett összefüggések alapján várható lett volna.

A legnagyobb mértékben a konstrukció hossza befolyásolja a teljesítményeket. Az ábrán az 5-ös hosszúságú konstrukciókat csak 1 feladatstruktúra képviseli (ezt három különböző tartalmú feladat testesíti meg), ezért, mivel itt is épp az ISP feladatáról van szó, ezt az értéket célszerű figyelmen kívül hagyni. A további három érték egyértelműen szemlélteti az összefüggéseket.

Ugyancsak jelez bizonyos hatást a kiinduló elemek száma is, de az nem annyira szembeszökő, mint a konstrukciók hosszának szerepe. A legkisebb hatást a lehetséges különböző konstrukciók száma gyakorolja: például a négy konstrukciót előállító feladatokra ugyanazt az átlagot kaptuk, mint a 8 konstrukciót előállító feladatok esetében.

8.2 A kombinatív képesség fejlődése

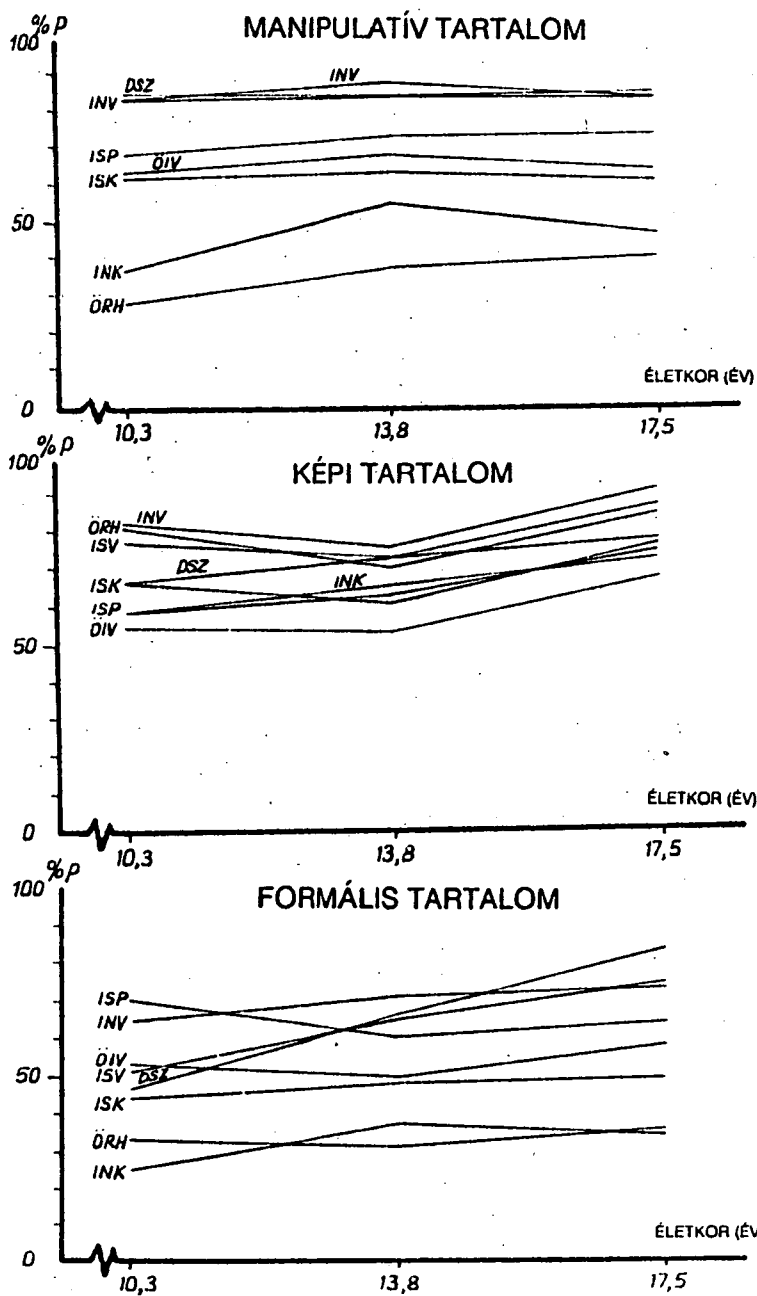
Az előző fejezetekben részletesen foglalkoztunk az egyes feladatokban nyújtott teljesítmények fejlődésével. Amint láttuk, ez a részletesség, a feladatonkénti elemzés nem volt indokolatlan, az egyes feladatok fejlődése és struktúrája között sajátos összefüggéseket figyelhettünk meg. A részletek vizsgálata mellett azonban szükségünk van a nagyobb egységek fejlődésének tanulmányozására, az átfogó tendenciák megismerésére is. Az egyes feladatoknál struktúrájuktól függően kisebb vagy nagyobb fejlődést, esetleg visszaesést tapasztaltunk. Most azt vizsgáljuk meg, hogy a feladatokra jellemző egyedi változások összegeződve milyen globális fejlődést határoznak meg.

Az egyes műveletek vizsgálatára három-hat feladatot használtunk, mely feladatok együtt egy szubtesztet alkotnak. Elsőként tehát e szubteszteken nyújtott teljesítmények fejlődését érdemes szemügyre vennünk. A különböző tartalmú szubtesztek eredményeiből a megfelelő műveletek fejlődésére következtethetünk.

Az összehasonlíthatóság érdekében a szubtesztek eredményeinek átlagát %-pontban adtuk meg. A %p számításához a feladatok megoldásának jóságát jellemző súlyozott mutatókat (G), pontosabban ezek átlagát használtuk fel, a százalékpontot itt is a pontszámok lehetséges maximumának százalékában fejeztük ki:

$$(5) \quad \%p = (\Sigma G / \Sigma T) \cdot 100.$$

A 24 szubteszt teljesítményének változását, a műveletek megfelelő tartalmakon való működésének fejlődését a 35. ábrán szemléltetjük. Az egyes feladatok fejlődési görbéinek elemzése során már foglalkoztunk a szubtesztek feladatainak közös vonásaival, a szubtesztek szintjéig általánosítható sajátosságaival. Így itt most az ábrához csak néhány általános megjegyzést fűzünk.



35. ábra
A kombinatív műveletek fejlődése

A három tartalmat összehasonlítva a legfeltűnőbb a manipulatív és a képi hasonlósága, abban az értelemben, hogy az egyes műveletek között ezeknél nagyok a különbségek, az egyes görbék között jelentős távolságok vannak. A formális szubtesztok görbéi azonban alacsonyabb teljesítményeket jeleznek. A képi szubteszteken nyújtott teljesítmények fejlődési görbéi közelebb vannak egymáshoz, és a görbék jellegzetes törést mutatnak.

A görbék ritkán jeleznek monoton növekedést, a legtöbb "szabálytalan", valamelyik szakaszán visszaesés mutatkozik. Szabályos görbét és jelentős fejlődést csak néhány műveletnél tapasztaltunk. Ilyen például az összes részhalmaz képzése manipulatív tartalommal, vagy a Descartes-féle szorzatok képzése formális tartalommal.

A fejlődési vonalak gyakran átmetszik egymást. Ez azt jelenti, hogy amit a feladatoknál tapasztaltunk (az életkor változásával megváltozik a feladatok relatív nehézsége), az a műveletekre (a szubteszt nagyságú egységekre) is jellemző. Ebből az is következik, hogy az előző pontban elvégzett struktúraelemzések, az ott levont következtetések nem tekinthetők az életkortól függetleneknek. Eredményeinket a műveleti képesség struktúrájának 14 éves korban jellemző állapotaként kezelhetjük.

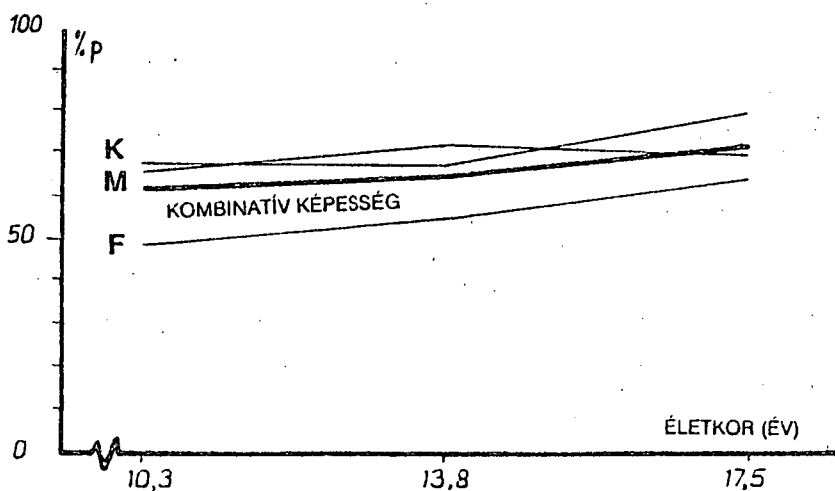
Végül, ha a kombinatív képesség fejlődéséről még tömörebb képet kívánunk kapni, érdemes az egyes tartalmakra jellemző összevont mutatókat kiszámítani, illetve ezeknek az életkor függvényében való változását megvizsgálni. A szubtesztkeéhez hasonlóan ebben az esetben is a %-os teljesítményeket adjuk meg, bár, mivel a három feladatrendszer struktúrája pontosan megegyezik, most a nyerspontok is összehasonlíthatók. Hasonlóképpen számítottunk %-os mutatót a kombinatív műveleti képesség egészére, mellyel a fejlődést legáltalánosabban jellemezhetjük.

A három különböző tartalmú feladatrendszerre, illetve a kombinatív képesség egészére jellemző százalékos teljesítmények változását az életkor függvényében a 36. ábrán szemléltetjük. Amint az ábráról leolvasható, mind a manipulatív, mind pedig a képi tartalom fejlődésgörbéje "szabálytalan" törést szenved, mégpedig ellentétes irányút. A manipulatív teljesítmények 14 és 17, a képi teljesítmények 10 és 14 év között esnek vissza. A visszaesés csekély, csupán 1-2%p. A formális tartalomnál mindkét életkori intervallumban növekszik a teljesítmény, 10 és 14 éves kor között kevésbé, majd valamivel gyorsabban.

A manipulatív és a képi tartalmú feladatrendszer fejlődési görbéi nem csupán törést mutatnak, hanem ezentúl metszik is egymást, mégpedig kétszer is. Ez azt jelenti, hogy a M-K-F empirikus nehézségi sorrend csak a 14 éves mintára érvényes, 10 és 17 éves korban a K-M-F nehézségi sorrendet kapjuk.

Lényegében a görbék metszését is a szóban forgó szabálytalanságok okozák, ezért tehát annak magyarázatát kellene megtalálnunk, miért válik 14 éves korban a képi, 17 éves korban pedig a manipulatív tartalom a vártnál nehezebb-

bé. Az utóbbira könnyű plauzibilis hipotézist megfogalmaznunk: feltételezhetjük, hogy a 17 évesek már jelentősen "meghaladták" a manipulatív szintet. Az eszközök rakosgatása, a konstrukciók tényleges elkészítése idegen számukra, vagyis a manipulatív tartalom ebben az életkorban már inkább nehezíti, mint könnyíti a feladatok megoldását. Nem lehet hasonlóan valószínű választ találni arra a kérdésre, hogy miért éppen a 14 éveseknél okoz nehézséget a képi tartalom, miért magasabb mind a fiatalabb, mind az idősebb minta teljesítménye.



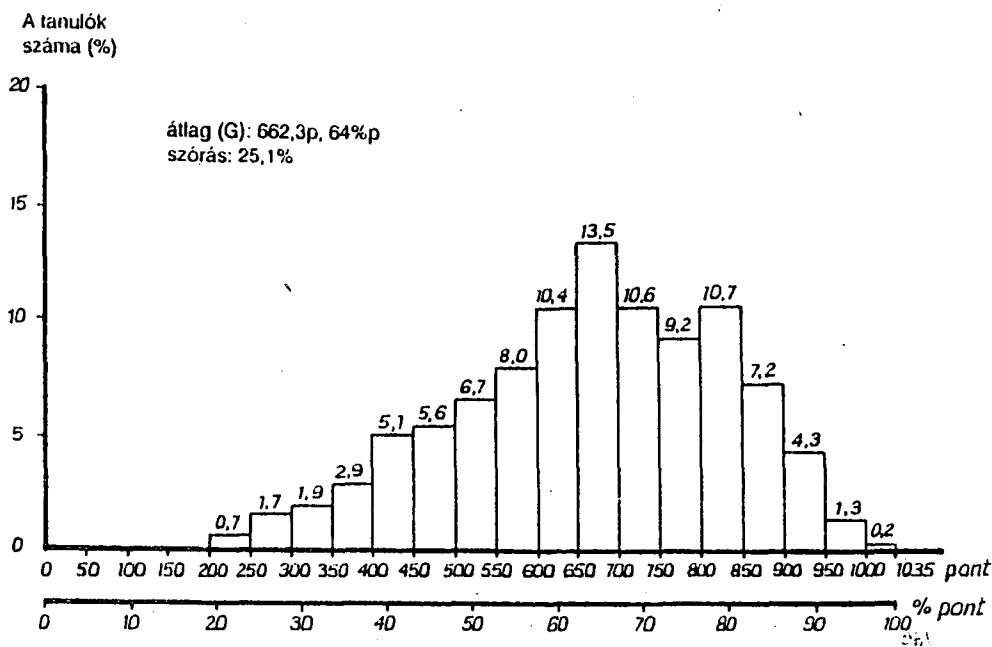
36. ábra
A kombinatív képesség fejlődése

A háromféle tartalmú tesztrendszer eredményeinek összegzésével a szabálytalanságok kiegyenlítődnek, a teljes kombinatív művelési képesség teljesítménye végül mindkét életkori szakaszban növekedést mutat. Az empirikus vizsgálattal átfogott életkori periódusban (kb. 7,2 év) mintegy 10 %-pontos fejlődést találtunk. Az induló szint 61%p, ami meglehetősen magas. A kombinatív műveletek fejlődésének nagyobbik része tehát az általános iskola alsó tagozatának idejére, illetve a még korábbi életkorra tehető. A 14 éves korra a 64%-os teljesítmény jellemző, az általános iskola felső tagozata tehát a műveletek fejlődésére kevés hatást gyakorol. A teljes népességben a fejlődés valószínűleg még e 3%p-nál is kisebb, mivel a nyolcadikos mintában nem szerepeltek azok, akik időközben lemaradtak, és az általános iskolát nem fejezik be. Vizsgálatunk ugyanis nem a teljes népességre, csupán az iskolába járó populációra reprezentatív.

A középiskola harmadik osztályáig további 7%-os fejlődést mértünk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy itt a minta torzító hatása még inkább jelentkezhet, hiszen azokra, akik nem tanultak tovább, illetve nem jutottak el a középis-

kola harmadik osztályáig, vizsgálatunk nem terjed ki. (20%-os lemorzsolódással számolva a teljes populációra jellemző adat 17 éves korban kb. 68-69%p lehet.)

Röviden szólnunk kell a fejlődési folyamatok vizsgálatának további lehetőségeiről is. Amint már korábban jeleztük, e dolgozatban nem foglalkozunk a kombinatív műveletek működésének minőségi különbségeivel, sem pedig a fejlődés kvalitatív szintjeivel. A statisztikai módszerek alkalmazhatósága érdekében a feladatmegoldásokat jellemző adatokat kvantitatív mértekekké alakítottuk, így az adatfeldolgozásnak ez a módja a finom kvalitatív különbségek elemzésére nem alkalmas. A vizsgálat rögzített adatai, a feladatok megoldásaként leírt felsorolások viszont alkalmasak a kvalitatív különbségek, illetve változások tanulmányozására is. A felsorolási sorrendeket is reprezentáló vektorok összessége azonban akkora információhalmazt alkot, melynek kezelése még számítógéppel is nehézséget okoz, a minőségi analízis pedig speciális programokat igényel. Ezért a fejlődés kvalitatív folyamatainak egzakt feltárásában a további munka során is csak lassú előrehaladás várható.



37. ábra

A kombinatív képesség fejlettségének eloszlása 14 éves korban

Végül érdemes egy pillantást vetnünk a kombinatív képesség eredményeinek eloszlására. A 37. ábrán a 14 éves tanulók teljesítményeinek eloszlását szemléltetjük. Az átlag 662,3 p, ami, mint már jeleztük, 64%p-nak felel meg. A relatív szórás 25,1%, ami azt jelzi, hogy a minta szóródása nem túl nagy. Ez esetben pontosan kiszámítottuk a konfidenciaintervallumot is. Az átlag tehát $p=0,05$ valószínűségi szinten $662,3 \pm 14,6$ p; százalékpontban $64\%p \pm 1,4\%p$. A kombinatív képesség fejlettségét 14 éves korban mintegy másfél %-os pontossággal becsüljük.

A 111 feladat megoldása 1035 megfelelő konstrukció felsorolását jelenti. Ilyen nagy szám esetén a véletlen tévedés lehetősége is igen valószínű, természetesnek kell tehát tartanunk, hogy hibátlan megoldás nem volt. Akadt viszont egy tanuló (0,2%), aki 1000-nél több konstrukciót sorolt fel hibátlanul. A mintában nem volt olyan tanuló sem, aki legalább 200 pontot (a maximum ötöde) el ne ért volna.

8.3 A tartalom és a struktúra kölcsönhatása

Amint azt az elméleti bevezető fejezetekben kifejtettük, empirikus vizsgálatainkkal a kombinatív műveleti képességről kívánunk érvényes ismereteket szerezni. A kombinatív műveletek mint gondolkodási képességek, mint pszichikus szabályozási rendszerek közvetlenül nem tehetők a vizsgálat tárgyává. Vizsgálhatjuk viszont a megfelelő tevékenységeket, amelyekben megnyilvánulnak. Képességeket kutatva tehát az első áttétel a képesség-tevékenység viszonyában jelentkezik, tehát az első kérdés, amit tisztáznunk kell, hogyan foglalkunk állást e viszony tekintetében.

A pszichológiai képességvizsgálatok igen nagy része csak annyit követel meg, hogy a képesség valamilyen paramétere és a vizsgálatára szolgáló tevékenység valamely kvantitatív jellemzője (általában a teljesítmény) között függvénykapcsolat legyen. Vizsgálati módszerként bármely tevékenység szóba jöhet, amely a fenti tulajdonsággal rendelkezik. Így használhatók például az intelligencia mérésére Raven progresszív mátrixai éppen úgy, mint egészen más típusú feladatsorok. Természetesen, amint azt a pszichológiai mérőeszközökkel foglalkozó hatalmas irodalom is igazolja, e látszólag egyszerű követelmény (az egyértelmű függvénykapcsolat létezése) kielégítése sem könnyű.

Igényesebb vizsgálatok az adott képességnek valamilyen belső tagozódást tulajdonítanak, és a rendszer egyes részeihez rendelnek hozzá egy-egy tevékenységet, melyek között a fenti kritériumnak fenn kell állnia. Itt még mindig a tevékenységek egy egész osztálya jöhet szóba (például többféle verbális intelligenciateszt vagy memóriapróba).

A műveleti képességek általunk végzett vizsgálata során még szigorúbb megoldást alkalmaztunk. A műveletek (hipotetikus) rendszerének itt is megfe-

leltetünk egy tevékenységrendszer, mégpedig úgy, hogy a tevékenységrendszer leképezi a műveletek rendszerét (művelet-szubteszt megfeleltetés). Továbbá, mivel a műveleteket struktúrájuk alapján identifikáljuk, a műveleteknek megfelelő szubtesztbe meghatározott struktúrájú feladatoknak kell kerülniük. A képesség-tevékenység viszonyában tehát nem csupán a kvantitatív függvénykapcsolatot követeljük meg, hanem az egymásnak való strukturális megfeleltethetőséget is. Ezzel egyben a vizsgálat céljaira szóba jöhető tevékenységek körét is nagymértékben leszűkítettük.

A pusztá feladatstruktúrák azonban nem használhatók közvetlen vizsgálat céljaira, azokat valami módon elvégzendő tevékenységgé kell alakítani, konkrét tartalommal felruházva feladattá kell fogalmazni. A feladattá alakítás során viszont sokféle tartalom jöhet szóba, állást kell tehát foglalnunk abban a kérdésben, hogy miképpen válasszuk meg a tartalmat. A helyzet tehát az, hogy miután a képesség-tevékenység viszonyában szigorú strukturális meghatározottságot hoztunk létre, a probléma erősen leszűkítve ugyan, de ismét felmerül a feladatstruktúra és az adott tartalmú konkrét feladat viszonyában.

Az első fejezetekben felvázolt, illetve a műveleti képességek vizsgálatának alapjául szolgáló elméleti koncepció állásfoglalást jelent a tartalom megválasztásának kérdésében is. Egyrészt a műveleti képességeknek nem kötött a tárgya, vagyis ugyanaz a művelet a tartalmak széles körében működőképes (Nagy, 1985, 32.o.). Elvileg tehát mindegy, hogy milyen a feladat tartalma, mi az adott tevékenység tárgya, a struktúra egyértelműen meghatározza a műveleteket, tehát a vizsgálatára bármely tartalmú feladat felhasználható. Másrészt viszont a feladatok tartalmát nagyon széles skálán változtathatjuk. Lehet, hogy a tartalom elfedi a kombinatorikai struktúrát, közölhetünk például sok felesleges információt, beleágyazhatjuk ismeretlen helyzetekbe, ahol a mellékkörülmények elterelik a figyelmet, adhatunk szokatlan tárgyakat stb. De olyan is lehet a feladat tartalma, ami ismerős, amire konkrét felsorolási készségek alakultak ki (pl. a nyelvtani ragozások szerkezetüket tekintve a Descartes-féle szorzatok képzésének felelnek meg), vagy ami segíti, sugallja a megoldást. A műveleti képességeknek a tárgyhoz (tartalomhoz) nem kötött voltát tehát nem értelmezhetjük úgy, hogy a konkrét teljesítmények is függetlenek lennének a feladatok tartalmától.

E megfontolások alapján világos, hogy vizsgálataink eredményének megítéléséhez elengedhetetlenül szükséges a tartalom szerepének empirikus vizsgálata is. Mivel az egész mérést eleve három különböző tartalommal párhuzamosan végeztük, adataink erre kiváló lehetőséget kínálnak. A problémát többféle megközelítésben, különböző módszerek alkalmazásával elemezzük.

A háromféle tartalmat úgy választottuk meg, hogy azok egyben háromféle absztrakciós szintet is képviseljenek. Természetesen ugyanazon az absztrakciós szinten még igen sok különböző tartalom jöhet számításba. Ezért a tartalom jellemzésére bevezettünk egy további fogalmat, a feladat zajosságának fogal-

mát, melynek (ugyancsak rangsorolható) kvalitatív szintjei lehetnek. A feladat zajosságával a feladat tartalmának információgazdagságát, a felesleges információknak és a tartalomnak a struktúrát háttérbe szorító jellegét jellemezzük. Az alap feladatrendszer kidolgozása során törekedtünk a minimális zajosságú feladatok kialakítására. Ezenkívül néhány képi szubtesztnek elkészítettük egy zajosabb változatát is.

Struktúra és tartalom szerepének empirikus elemzése során célszerű az egymásnak megfeleltethető, azonos struktúrájú, de különböző tartalmakban megtestesülő feladatok eredményeinek összehasonlításából kiindulni. A szükséges adatokat a 18. táblázatban foglaltuk össze.

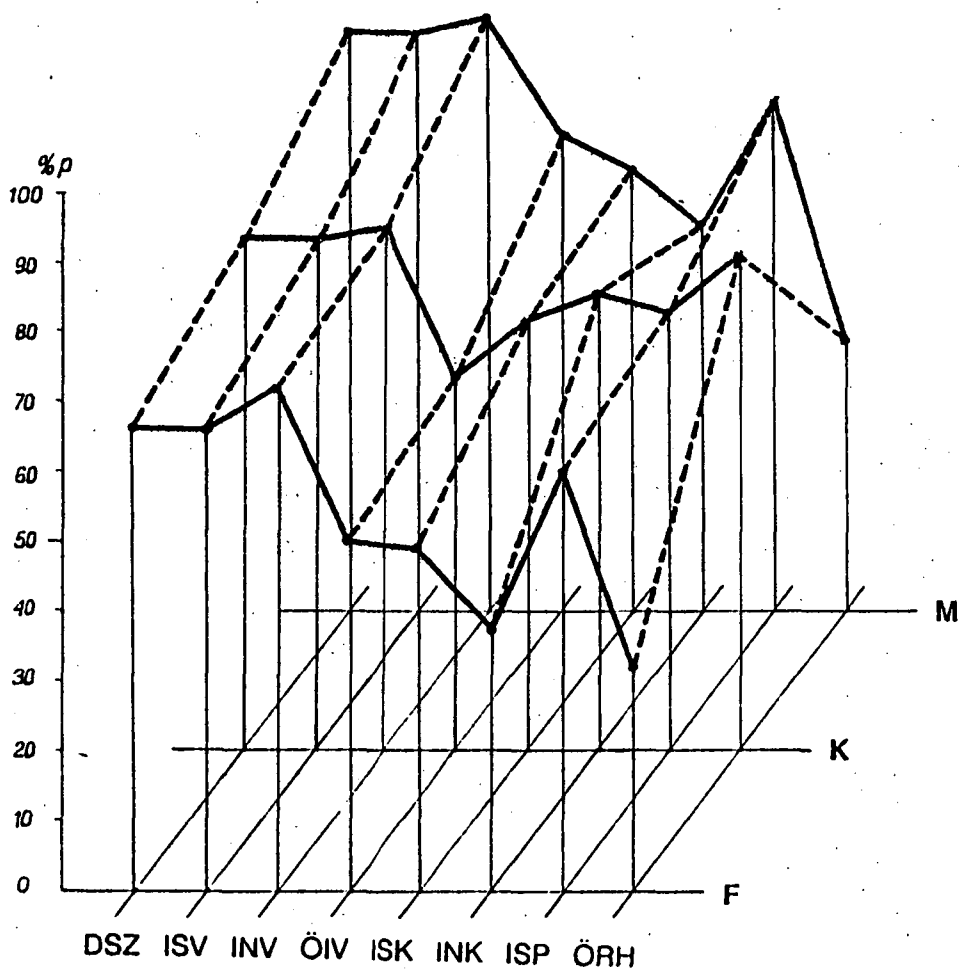
Amint a táblázatból kitűnik, az azonos struktúrájú feladatok között meglehetősen alacsony korrelációs együtthatókat kaptunk, előfordul néhány egészen kicsi, nem szignifikáns érték is. Szorosabb korreláció főleg a képi-formális feladatok között található. Mire következtethetünk ebből? Egyrészt lehet, hogy a megfelelő összefüggések valóban gyengék. Másrészt azonban nem feledkezhetünk meg arról, hogy magas korrelációt elvárni azt jelenti, hogy egyetlen feladattól olyan szintű reliabilitást várunk, mint egy sok feladatból álló tesztől. Márpedig tekintettel az aktuális teljesítmény véletlen ingadozására (fáradtság, figyelmetlenség, véletlen tévedés lehetősége stb.) ez indokolatlan. Az egyes felmérések között ugyanis több hét is eltelt. Nem is beszélve a korreláció értékét csökkentő további technikai problémákról. A nagyobb egységeknél (szubteszt, teszt) viszont a korrelációk már jóval magasabbak. Az egymásnak megfeleltethető szubtesztek például (ld. 17. táblázat) átlagosan $r=0,4$ körüliek. A korrelációs együtthatók tehát nem a legalkalmasabb adatok a tartalom és struktúra problémájának elemzéséhez.

Feltehetjük, hogy az egyes tanulók teljesítményeinek ingadozásai a teljes minta átlagában kiegyenlítik egymást (hacsak nem mindenki egyszerre fáradt, indiszponált, figyelmetlen, motiválatlan stb.), más megközelítést jelent tehát a teljesítmények adatainak összevetése (a 18. táblázat első három számoszlópa). A szintek összevont mutatóinak adataiból már tudjuk, hogy (14 éves korban) átlagosan a M-K-F sorrendben csökken a teljesítmény. A feladatok adatainak összehasonlításából pedig kitűnik az, hogy kisebb-nagyobb ingadozásokkal és néhány szubteszt kivételével ugyanez érvényes a feladatokra is.

Az arányok jobb áttekinthetősége érdekében a 38. ábrán a szubtesztek eredményeit szemléltetjük. Az ábrán az azonos tartalomhoz tartozó szubtesztek eredményeit folytonos vonallal kötöttük össze, az ugyanahhoz a művelethez tartozó különböző tartalmú szubtesztek eredményeit pedig szaggatott vonallal. Az ábra nagyon szemléletesen mutatja, hogy a manipulatív és a formális tartalmat jellemző vastag vonalak alakja igen hasonlít egymáshoz, azok közel párhuzamosan futnak. Vagyis a szubtesztekben nyújtott teljesítmények arányai a két tartalomnál megegyezők. A képi tartalom első négy szubtesztjének eredményei is jó közelítéssel követik a másik két tartalomra jellem-

18. táblázat. A különböző tartalmú feladatok összehasonlítása

Feladat		G átlag			korreláció		
		M	K	F	r_{MK}	r_{MF}	r_{KF}
Descartes-féle szorzatok képzése	a	3,64	3,34	2,87	0,02	0,12	0,28
	b	5,54	4,93	4,27	0,08	0,12	0,40
	c	10,74	9,58	8,10	0,16	0,23	0,41
	d	6,70	5,35	5,34	0,24	0,15	0,43
	e	10,71	9,87	9,07	0,25	0,22	0,37
	f	11,33	9,33	9,51	0,30	0,24	0,49
Ismétléses variációk képzése	a	3,84	3,32	3,51	0,11	0,19	0,33
	b	7,10	5,91	5,37	0,12	0,21	0,48
	c	8,24	7,07	6,69	0,13	0,19	0,38
	d	13,98	12,43	11,77	0,15	0,28	0,43
	e	11,04	9,78	7,71	0,23	0,27	0,46
Ismétlés nélküli variációk képzése	a	5,23	4,61	4,55	0,13	0,10	0,24
	b	5,23	4,55	4,62	0,05	0,15	0,29
	c	10,40	9,27	8,48	0,11	0,20	0,40
	d	16,88	25,17	13,92	0,12	0,25	0,40
Az összes ismétléses variáció képzése	a	4,35	2,95	3,25	0,29	0,27	0,24
	b	6,52	6,19	6,19	0,36	0,32	0,35
	c	8,47	5,98	5,72	0,30	0,34	0,37
	d	14,49	12,15	10,62	0,38	0,35	0,37
Ismétléses kombinációk képzése	a	2,29	1,18	2,10	0,22	0,30	0,19
	b	2,39	2,35	1,57	0,17	0,27	0,14
	c	2,40	2,57	1,65	0,26	0,37	0,25
	d	4,25	3,84	3,53	0,21	0,32	0,35
	e	5,88	6,50	4,27	0,19	0,29	0,22
	f	7,21	7,24	5,69	0,16	0,32	0,33
Ismétlés nélküli kombinációk képzése	a	1,56	2,64	1,24	0,14	0,26	0,16
	b	4,25	5,23	2,60	0,14	0,22	0,16
	c	7,26	7,91	5,01	0,29	0,31	0,32
	d	5,29	6,17	3,60	0,25	0,34	0,38
	e	6,26	7,01	4,22	0,26	0,34	0,47
Ismétléses permutációk képzése	a	2,67	2,45	2,54	0,14	0,19	0,26
	b	5,00	4,34	4,45	0,19	0,12	0,39
	c	8,17	6,89	6,20	0,29	0,25	0,44
	d	6,81	5,92	5,59	0,30	0,26	0,51
Az összes részhalmaz képzése	a	1,58	8,53	1,36	0,25	0,33	0,24
	b	2,73	5,48	2,28	0,19	0,39	0,19
	c	5,27	9,72	4,45	0,23	0,42	0,32



38. ábra
A tartalom hatása a szubtesztok eredményeire

ző tendenciát. Azonban a második négy szubteszt, pontosabban csak az ISK, INK és az ÖRH eredményei magasabbak, mint ami arányosan várható lenne.

A három képi szubteszt korábban már értelmezett eltéréseit kivéve tehát megállapíthatjuk, hogy a különböző tartalmú szubtesztek eredményei párhuzamosan alakulnak. Vagy másként szemlélve a dolgot, azt is mondhatjuk, hogy azonos tartalom mellett a struktúra megváltoztatása (más művelet) többnyire nagyobb változást eredményez, mint az azonos struktúra mellett a tartalom megváltoztatása. Természetesen a szubtesztnyi méreteken már sokféle hatás összegződik, tehát a kérdés pontosabb tanulmányozásához olyan lehetőségeket kell találnunk, melyben a tartalom és struktúra hatása tisztán és összehasonlítható módon érvényesül.

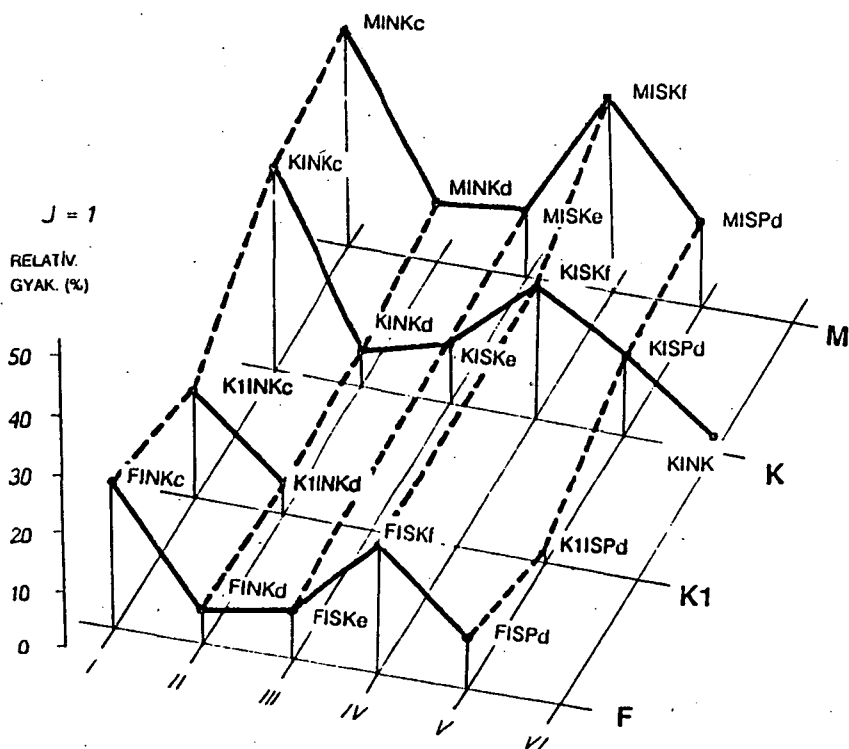
A precízebb elemzésekhez alkalmas nyersanyagot szolgáltatnak az izomorf feladatok eredményei. Az izomorf problémák a kognitív pszichológia kedvelt vizsgálati eszközei, mivel a struktúra nagymértékű hasonlósága lehetővé teszi a tartalmi különbségek hatásának precíz analizisét (ld.: Hayes-Simon, 1970; Simon-Hayes, 1976). Esetünkben izomorfnak azokat a feladatokat tekintjük, amelyekben a felsorolt konstrukciók között, valamint a konstrukciókra alkalmazott rendezési relációk között egy-egy értelmű megfeleltetés létesíthető. Az izomorfianál szigorúbb hasonlóság a struktúra azonossága. Feladatrendszerünkben a három szint megfelelő feladatai azonos struktúrájúak, és több izomorf struktúrájú feladatokból álló csoport is előfordul.

Ilyen izomorf feladatcsoportot alkotnak a "KOMBINÁLÁS" teszt 10 konstrukciót előállító feladatai. A képi szint már említett "zajosabb" tartalmú feladatai között további 4 megfelelő feladat van, így 19 izomorf struktúrájú feladat áll rendelkezésünkre. (A probléma és az elemzés részletes kifejtését ld.: Csapó, 1985.) E 19 feladat hat különböző struktúrával jellemezhető, ezeket a struktúrákat jelöltük római számokkal (A VI. struktúrához 1 feladat tartozik. Ez a KINK c és d feladatának egyesítéseként fogható fel, a teszten felhasznált ábra is megegyezik azokéval. Az öt gyümölcsöt ez esetben két részre kellett osztani egy vonallal úgy, hogy egyik részbe két, a másikba három gyümölcs essen.) A "zajosabb" képi változattal együtt, melyet K1-gyel jelöltünk, négyféle tartalmat különböztettünk meg. (K1-hez csupán három feladat tartozik.) Hasonlítsuk most össze e feladatok eredményeit.

A 39. ábrán a hibátlan megoldások arányát (amely jobban differenciál, mint a J átlag) ábrázoltuk a struktúra és a tartalom függvényében. Az ábra rendkívül szemléletesen érzékelteti, hogy az eredmények a négy különböző tartalom mellett párhuzamosan alakulnak. A struktúradimenzió mentén haladva (folytonos vonal) a hibátlan megoldások aránya nagymértékben ingadozik, vagyis a struktúra kismértékű, még az izomorfia határain belül maradó megváltoztatása is jelentősen befolyásolja a teljesítményeket. A tartalomdimenzió mentén haladva (szaggatott vonal) viszont kisebb az ingadozás, habár a feladatok tartalma eltérő absztrakciós szintű.

Látható az is, hogy a feladatok zajosabbá válása (K1INK *c* és *d* feladat, ahol ötből két, illetve három gyereket kell megjutalmazni egyforma gyümölcsökkel, kis ábrán jelölve, mely gyerekek kapják a gyümölcsöt) csökkenti ugyan a teljesítmény szintjét, de azok relatív viszonya nem változik. Továbbá a zaj megnövekedése erősebben befolyásolja a teljesítményt, mint az absztrakciós szint változása.

Ez az eredmény számunkra rendkívül fontos, ugyanis azt jelenti, hogy a teljesítményt sokkal erősebben determinálja a struktúra, amit vizsgálni kívánunk, mint a tartalom. Tehát ha megfelelő "tisztaságú", semleges, a kombinatorikai struktúrát nem elfedő tartalmat választunk, akkor lényegében közömbös, hogy milyen ez a konkrét tartalom, ugyanazoknak a műveleteknek a vizsgálatára alkalmas. E pontosan összevethető feladatok eredményei azt is sugallják, hogy a tartalom gondos megválasztásával, vagyis ügyelve arra, hogy az "semleges" legyen, lehet különböző tartalmú, de mérésre ekvivalens módon használható azonos struktúrájú mérőeszközöket készíteni. Ebben az összefüggésben a képi tartalom némely szubtesztjének "szabálytalan" viselkedését jórészt a nem megfelelő tartalomnak kell tulajdonítanunk.



39. ábra
Izomorf feladatok eredményeinek alakulása
a struktúra és a tartalom függvényében

Még egy kérdést érdemes a tartalommal kapcsolatban felvetnünk. A manipulatív-képi-formális sorrend az absztrakciós szint növekedésének felel meg, és 14 éves korban ebben a sorrendben csökken a teljesítmény (72, 67, 55%). Kérdés marad azonban, hogy emögött a fejlődés hierarchikus rendje van-e, vagyis az alacsonyabb absztrakciós szintű feladat megoldása feltétele-e a magasabb szintűnek, vagy pedig a magasabb szint feladatait egyenlő eséllyel oldják meg az alacsonyabb szintű feladatot megoldók és nem megoldók. A kérdést megválaszolhatjuk egy a kvalitatív adatok elemzésére szolgáló eljárás, a *DELTA-analízis* segítségével.

Bár az eljárás Magyarországon alig ismert (magyar kutatók publikációiban még nem találkoztunk vele), a módszer részletes leírásától itt el kell tekintenünk (ld.: Froman-Hubert, 1980; Henning-Petermann, 1983; Rudinger et al., 1985). Lényege abban áll, hogy megfogalmazunk valamilyen hipotézist, "szabályt", majd kiszámítjuk, hogy az adatok eloszlása milyen mértékben követi az ily módon ismert szabályt, illetve milyen az ismeretlen szabály mértéke. Ehhez az adatainkat kontingenciatáblázatba rendezzük, és megállapítjuk, hogy hipotézisünk szerint melyik cellába eshet adat, és melyek azok a cellák, az ún. hibacellák, amelyekbe a hipotézis értelmében nem eshet adat. Ezután kiszámítjuk a DELTA értéket a következő formula szerint:

$$(6) \quad \text{DELTA} = 1 - \frac{\sum w_{ij} P_{ij}}{\sum w_{ij} P_{i.} P_{.j}}$$

ahol w_{ij} : a cellák súlya, hibacellára 1, a többi esetben 0;

P_{ij} : a cella megfigyelt relatív gyakorisága

$P_{i.}$ és $P_{.j}$: marginális relatív gyakoriságok

Esetünkben jelöljük 1-gyel azt, ha egy feladat megoldása hibátlan, 0-val, ha hibás. Nézzük meg, hogy egy feladatstruktúrához tartozó három különböző szintű feladat megoldásainak milyen esetei lehetségesek! Egyiket sem oldotta meg az adott tanuló: 000. Csak a manipulatívot oldotta meg: 100, csak a képit: 010; manipulatívot és képit együtt: 110; és így tovább: 001, 101, 011, 111.

Ha az a hipotézisünk, hogy az M-K-F fejlődési sorrendnek kell érvényesülnie, akkor előfordulhat: 000, 100, 110, 111. Vagyis csak azok az esetek megengedettek a hipotézis szerint, amikor a magasabb absztrakciós szintű feladatok megoldásával együtt az alacsonyabb szintű feladatok megoldása is jó.

Adatainkat 2x4 mezős kontingenciatáblázatba rendezve ezek lesznek a megengedett cellák, a többi a hibacella, hiszen például hipotézisünk szerint nem megengedett a 001, vagyis az, hogy a formális feladat megoldása jó, de a manipulatív és a képi nem.

A DELTA analízist elvégeztük mind a 37 feladatra. Jónak fogadtuk el a feladatot $J > 0,9$ esetén, egyébként rossznak minősítettük. A számítások bemenő

19. táblázat. A DELTA analízis kiinduló adatai és eredményei

Tartalom Feladat		Gyakoriságok								n	Ismeri szabály	Ismeretlen szabály	DELTA
		M	0	0	0	0	1	1	1				
		K	0	0	1	1	0	0	1				
		F	0	1	0	1	0	1	0				
DSZ	a	18	10	20	36	52	55	62	251	504	0,240	0,298	0,195
	b	31	12	11	37	73	56	40	242	502	0,231	0,332	0,305
	c	63	26	24	50	65	56	58	161	503	0,310	0,390	0,205
	d	88	62	7	29	80	87	27	124	504	0,367	0,448	0,181
	e	66	35	21	53	42	43	37	204	501	0,303	0,396	0,234
	f	207	81	7	24	58	73	14	38	502	0,369	0,421	0,124
ISV	a	11	8	11	23	43	52	61	288	497	0,189	0,240	0,211
	b	120	14	48	26	118	22	76	74	498	0,221	0,299	0,261
	c	59	10	27	34	79	59	70	159	497	0,262	0,342	0,236
	d	106	16	50	46	64	49	63	102	496	0,325	0,397	0,182
	e	370	20	54	8	27	3	9	5	496	0,171	0,186	0,081
INV	a	53	32	33	43	71	63	62	141	498	0,343	0,399	0,139
	b	66	22	30	38	67	70	52	151	496	0,323	0,394	0,181
	c	88	18	46	46	86	46	57	110	497	0,314	0,397	0,210
	d	105	23	58	55	75	43	54	85	498	0,359	0,431	0,167
ÖIV	a	325	14	13	5	116	25	18	5	521	0,109	0,121	0,097
	b	374	9	9	5	94	12	12	4	519	0,067	0,081	0,172
	c	452	4	6	1	52	4	2	0	521	0,029	0,030	0,053
	d	385	12	16	3	77	14	10	4	521	0,086	0,096	0,098
ISK	a	237	27	53	14	56	43	44	42	516	0,266	0,302	0,120
	b	242	17	98	15	58	17	38	34	519	0,283	0,321	0,117
	c	272	15	71	16	37	15	25	28	479	0,244	0,291	0,161
	d	218	17	46	23	84	39	40	53	520	0,240	0,307	0,218
	e	390	15	41	10	39	9	9	2	515	0,146	0,161	0,093
	f	265	23	45	13	75	29	26	43	519	0,212	0,269	0,212
INK	a	51	10	166	46	13	3	105	113	507	0,444	0,470	0,055
	b	87	10	140	42	43	13	101	71	507	0,404	0,440	0,081
	c	217	17	59	31	70	25	30	58	506	0,261	0,346	0,245
	d	411	16	22	4	38	8	5	2	506	0,099	0,107	0,075
	e	483	4	11	0	6	2	1	0	507	0,034	0,033	0,008
ISP	a	21	23	17	47	41	55	50	252	506	0,281	0,333	0,156
	b	116	27	35	47	93	42	60	87	507	0,298	0,381	0,219
	c	347	23	43	8	55	8	14	6	504	0,163	0,178	0,085
	d	376	9	41	10	42	9	7	12	506	0,136	0,169	0,193
ÖRH	a	104	3	224	26	11	1	94	56	519	0,489	0,520	0,058
	b	221	9	145	14	45	13	40	26	513	0,353	0,378	0,066
	c	417	3	56	8	19	5	7	3	518	0,139	0,155	0,103

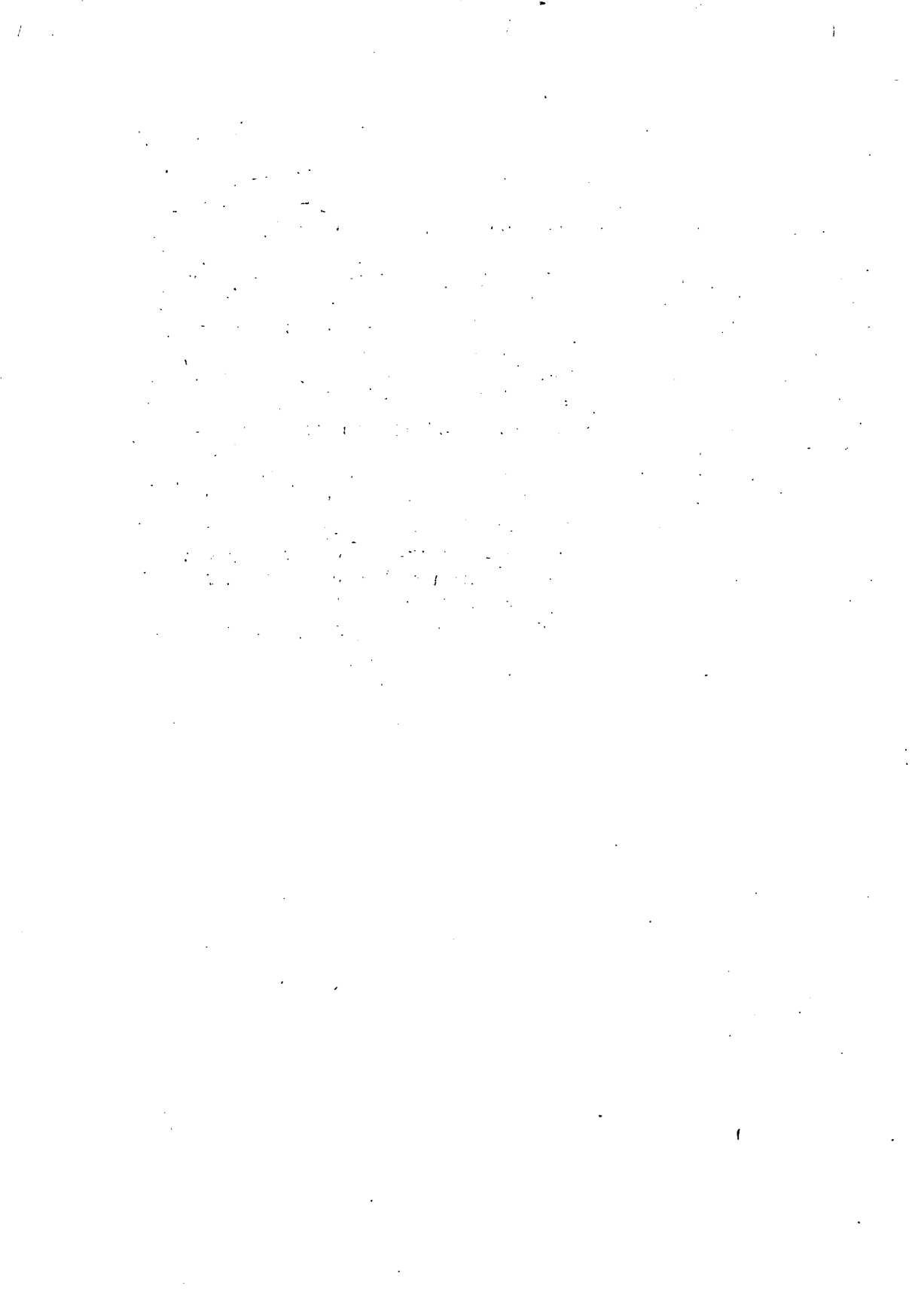
adatait és eredményeit a 19. táblázatban foglaltuk össze, egy feladathoz egy-egy sor adat tartozik.

A DELTA értékek a táblázat jobb oldali oszlopában szerepelnek, amint látható, a többségük nagyon kicsi pozitív érték, néhány még a 0,1-et sem éri el. A legmagasabb érték a DSZb feladathoz tartozik, itt felelnek meg az adatok legjobban a feltételezésnek. Azonban még ez is nagyon gyenge megfelelés. Összességében tehát azt a hipotézist, hogy a különböző absztrakciós szintek egyben a feladatmegoldások hierarchikus rendjét is determinálják, el kell vetnünk. Nagyon gyenge tendencia utal csak arra, hogy manipulatív tartalmú feladatok megoldása megelőzi a képi, a képi a formálist.

A struktúra és tartalom viszonyát több oldalról megvizsgálva eredményeinket úgy összegezhethetjük, hogy bár a feladatok megoldásában nyújtott teljesítmények nem függetlenek a feladat tartalmától, az eredményesség elsődleges meghatározója a feladat struktúrája.

Mérési eredményeinket az előző következtetés alapján úgy interpretálhatjuk, hogy azok valóban a vizsgálni kívánt műveleteket jellemzik, a teljesítményeket döntő mértékben valóban e struktúrák határozták meg. A vizsgálathoz felhasznált, kérdésfelvetésünk szempontjából lényegtelen és esetleges tartalmaknak a hatása pedig többnyire kicsi, más tartalmú feladatokat használva nagy valószínűséggel hasonló eredményeket kaptunk volna.

Természetesen megállapításaink érvényessége azokra az esetekre korlátozódik, amikor a feladat tartalma nem túlságosan "zajos", vagyis amikor a mellékes információk nem fedik el a kombinatív szerkezetet.



9. A KOMBINATÍV KÉPESSÉG FEJLŐDÉSÉT BEFOLYÁSOLÓ TÉNYEZŐK

9.1 A fejlődést befolyásoló tényezők statisztikai vizsgálatának lehetőségei

Az előző fejezetekben a kombinatív képességet önmagában vizsgáltuk. Az összefüggések elemzése is csak a kombinatív képesség belső struktúrájának feltárására irányult, nem foglalkoztunk azonban azzal, milyen kapcsolatban áll a kombinatív képesség a gondolkodás más területeivel, illetve külső tényezőkkel.

Mint korábban jeleztük, dolgozatunk egy nagyobb kutatási program részeként készült, az adatfelvételt a rendszerezési és a logikai képességgel közös mintán végeztük. Így lehetőségünk van e két képességgel való összefüggések vizsgálatára is. Továbbá felvettünk néhány, a tanulóra illetve a társadalmi háttérére vonatkozó adatot is, ami módot ad a kombinatív képesség környezeti kapcsolatainak elemzésére. Ebben a fejezetben a kombinatív képesség külső kapcsolatainak felvázolásával zárjuk az empirikus vizsgálat eredményeinek elemzését.

A belső kapcsolatrendszer feltárása során az összefüggések mindkét tagja egyaránt a kombinatív képesség része volt, mindkét oldal egyformán érdekelt bennünket, így a korrelációs együtthatók eredendően szimmetrikus mivoltuknál fogva megfontolásainkhoz jó kiindulási alapot biztosítottak. A továbbiakban a helyzet megváltozik: most már csak az összefüggések egyik tagjáról kívánunk új ismeretet szerezni. Érdeklődésünk aszimmetrikussá vált, ennek megfelelően kell megválasztanunk az adatfeldolgozás és -elemzés módszereit. Mivel a kombinatív képességet kívánjuk más tényezők függvényében tanulmányozni, céljainknak jól megfelel a regresszióanalízis. Mégpedig, mivel egyszerre sok tényező hatását kívánjuk a látókörünkbe vonni, többszörös regresszióanalízist végzünk.

Az eljárás a pedagógiai kutatásban nem újdonság, így technikai részletek ismertetésével nem foglalkozunk. (A matematikai alapokat nem matematiku-

sok számára is hozzáférhető formában legjobban Sváb, 1979, 153-164.o. ismerteti. A pedagógiai alkalmazást, az interpretáció lehetőségeit illetően ld. Nagy, 1980b, elsősorban a 39-45. oldalakat.) Mivel azonban a többszörös regresszióanalízis használatával, illetve értelmezésével kapcsolatban a pedagógiai és pszichológiai kutatásokban még mindig sok bizonytalansággal, illetve félreértéssel találkozunk, két megjegyzés az elemzéseink elé kívánczozik.

Mindenekelőtt hangsúlyoznunk kell, hogy amikor egy változót mint függő változót kiemelünk, ez teljesen önkényes technikai lépés, melyet bármelyik változóval megtehetünk. Az eredmények nem bizonyítják vagy cáfolják azt, hogy az adott függő változó a szó eredeti értelmében milyen mértékben függ, illetve valóban függ-e a független változóktól. A szimmetrikus korrelációs együttthatókból kiinduló eljárás erre eleve alkalmatlan. A meghatározottság irányáról csak általános ismeretelméleti alapelvek (pl. az ok megelőzi az okozatot), vagy konkrét szakmai elemzések alapján nyilatkozhatunk.

Ugyancsak fel kell hívnunk a figyelmet arra is, hogy a többszörös regresszióanalízis során a függő és független változók rendszerének rögzítésével egy modellt alkotunk a jelenségről, és meghatározzuk a modell konkrét paramétereit. Így, amíg a korrelációs együttthatók két változó együttváltozását a "valóságnak megfelelően" írják le, addig a regressziós koefficiensek a "modellnek megfelelően". Más modellt használva, néhány függő változót elhagyva, kicserélve, újakat felvéve egy adott független változó szerepe is radikálisan megváltozhat. Amennyiben tehát érvényes és általánosítható eredmények elérésére törekszünk, célszerű problémáinkat több oldalról megközelítenünk.

A rendelkezésünkre álló adatokkal többféle módon végeztünk többszörös regresszióanalízist. Ezekben a függő változó szerepét a kombinatív képesség vizsgálatára használt feladatrendszer különböző méretű egységeinek (tesztek, szintek összpontszámai, illetve a teljes feladatrendszer összpontszáma) teljesítményei, a független változó szerepét a másik két képesség eredményei, az iskolai teljesítmények, valamint a társadalmi háttér változói töltötték be. A rendelkezésünkre álló több mint harminc többszörös regresszióanalízis eredményeit nem fogjuk egyenként elemezni, hanem néhányat kiválasztva és a középpontba helyezve, de más elemzések adatait is felhasználva fogjuk vizsgálódásaink konklúzióit levonni.

9.2 A rendszerezési és a logikai képesség

A két másik műveleti képesség esetében még elméleti érveink sem lehetnek, amelyek alapján egyiket a másik függvényének tekinthetjük. Ez esetben tehát az összefüggések "egyirányúsítását" csak a vizsgálat szempontjai indokolják, illetve az a körülmény, ami miatt a többszörös regressziót általában használni szoktuk: a független változók egymás közötti kapcsolatainak kiszűrése, a

közvetlen és közvetett, továbbá a tényezőnkénti hatások különválasztása. Az egyes műveleteknél azonban már előfordulhat, hogy az egyirányú ok-okozati összefüggés mellett szólnak bizonyos elméleti érvek, például egyik művelet lehet a másik kialakulásának alapja.

A regresszióanalízis során a logikai és a rendszerezési képességnek a kombinatív képesség tesztjeihez hasonló nagyságú tesztjeit, pontosabban ezek eredményeit használtuk független változóként. Mivel a független változóként használt tesztek részletezésével nem foglalkozunk, magának a regresszióanalízisnek az eredményeit is csak röviden értékeljük.

A kombinatív képességgel mint függő változóval végzett regresszióanalízis eredményének fontosabb mutatóit a 20. táblázat tartalmazza. A szokásnak megfelelően β -val a path koefficiens (standardizált regressziós együtthatót), R -rel a többszörös korrelációs együtthatót jelöltük. Az $r \cdot \beta$ szorzat a megfelelő független változónak a megmagyarázott varianciához való hozzájárulását (teljes hatás), az R^2 pedig a független változók által együttesen megmagyarázott varianciát jelöli. A szabadságfok 290, így az adott regressziós koefficiensek $p=0,05$ valószínűségi szinten $t > 1,97$ esetén szignifikánsak.

A független változóknak ebben a rendszerében a logikai képesség öt tesztje közül három esetben találtunk szignifikáns path koefficiens. Talán annyit érdemes megjegyeznünk, hogy a "Kapcsolás" teszt a konjunktív, a "Választás" teszt a diszjunktív, a "Feltételképzés" az implikatív struktúrájú műveleteket vizsgálja. Az "Egyedi következtetés" tesztben kijelentéslogikai, az "Általános következtetés" tesztben pedig predikátumlogikai következtetési formák szerepelnek. (A logikai képesség vizsgálatának rövid előzetes ismertetését illetően ld.: Csirikné, 1983, 1986; Csapó-Csirikné-Vidákovich 1986, 1987; az eredmények részletes bemutatását Csirikné, 1988.) A kombinatív képesség mint függő változó meghatározásában szignifikáns regressziós együtthatóval a "Választás", a "Feltételképzés" és az "Általános következtetés" tesztek eredményei vesznek részt. A "Választás" 7,50%-kal, a "Feltételképzés" 7,21%-kal járul hozzá a megmagyarázott varianciához, az "Általános következtetés" pedig többel, mint az előző kettő együttvéve, 16,81%-kal.

Tekintettel a Piaget-elméletre, valamint a logikai műveletek hátterében meghúzódó kombinatorikai struktúrákra, a "Kapcsolás" teszt csekély hatása meglepő. Ugyancsak váratlan az is, hogy az "Általános következtetés" hatása nagy, az "Egyedi következtetés" hatása viszont elhanyagolható. Mivel az "Egyedi következtetés" áll közelebb a kijelentéslogikai műveletekhez, éppen a tényleges helyzet fordítottját várhattuk volna. Ahol nem találtunk szignifikáns hatást, természetesen ott sem mondhatjuk ki, hogy ilyen hatás nem létezik, hiszen lehet, hogy egészen szoros függvénykapcsolat áll fenn, de az nem lineáris.

Tekintettel azonban a magas korrelációs együtthatókra (mindegyik 0,55 fölött van), helyesebb úgy interpretálnunk az eredményeket, hogy a logikai

20. táblázat. A logikai és a rendszerezési képesség hatása a kombinatív képességre (többszörös regresszió)

FÜGGŐ VÁLTOZÓ: Kombinatív képesség						Szignifikancia ($p=0,05$)
Független változók		r	β	$r\cdot\beta$	t érték	
Logikai képes- ség	Kapcsolás	0,5871	0,0395	0,0233	0,9	igen
	Választás	0,7003	0,1072	0,0750	2,07	
	Feltétel- képzés	0,6591	0,1092	0,0721	2,44	igen
	Egyedi követ- keztetés	0,6069	0,0325	0,0198	0,79	igen
	Általános kö- vetkeztetés	0,7326	0,2303	0,1681	5,08	
Rendsze- rezési képes- ség	Szemponkép- zés	0,6549	0,0348	0,0250	0,76	igen
	Viszonyítás	0,5503	0,0566	0,0311	1,48	
	Sorképzés (nyelvi)	0,5395	0,0761	0,0413	2,09	
	Besorolás (nyelvi)	-0,4414	-0,0026	0,0011	0,08	igen
	Halmazkép- zés (nyelvi)	0,7241	0,2036	0,1466	4,39	
	Osztályozás (nyelvi)	0,6815	0,1847	0,1256	4,48	
	Besorolás (szenzoros)	0,4123	0,0577	0,0237	1,69	!
	Halmazképzés (szenzoros)	0,5235	0,0082	0,0043	0,21	igen
	Osztályozás (szenzoros)	0,1442	0,0046	0,0006	0,15	
$R=0,8670$		$R^2=0,7534$				igen

! $p=0,1$ valószínűségi szinten szignifikáns

képesség részeinek szoros belső összefüggései miatt a különböző részek hatása a kombinatív képességgel különösen szorosan összefüggő tényezőkön keresztül nyilvánul meg. A diszjunktív és implikatív struktúrák kiemelkedő szerepének hátterében álló okok felderítése további elemzéseket igényel.

A kombinatív és a logikai képesség összpontszáma közötti korreláció $r_{KL}=0,79$, tehát a kapcsolat közöttük meglehetősen szoros. Amint azonban a regresszióanalízis tükrözi (és amint a további adatok is igazolni fogják), a kapcsolat egy része áttételesen, más tényezők közvetítésével jön létre.

A rendszerezési képesség vizsgálatára (Nagy, 1987) használt tesztek közül ugyancsak háromnál találtunk szignifikáns regressziós együtthatót. Mindhárom teszt nyelvi tartalommal vizsgálja a rendszerezési képesség megfelelő komponensének a működését. A "Sorképzés" 4,13, a "Halmazképzés" 14,66, az "Osztályozás" 12,56 százalékkal járul hozzá a megmagyarázott varianciához.

A rendszerezési képesség műveleti struktúrájukat tekintve igen közel állnak a kombinatív képességhez. Itt azonban a helyzet fordított, mint amit a logikai képességgel kapcsolatban elmondtunk. Részletesebb elemzésekkel ki lehet mutatni, hogy néhány rendszerezési művelet a kombinatív műveletek elemi összetevői között található. Így az eredmények nagyon jól interpretálhatók, összhangban vannak az elméleti elemzés konzekvenciáival. A három szignifikáns hatást felmutató teszt a rendszerezési képességnek éppen a kombinatív képességhez legközelebb álló részeit vizsgálja. A konkrét tesztfeladatokat áttanulmányozva annak magyarázatát is megtalálhatjuk, miért szorulnak háttérbe a szenzoros tesztek a nyelvi tesztek mögött: a nyelvi teszteken elvárt tevékenységben sokkal explicitebb módon nyilvánulnak meg a kombinatív képességgel kapcsolatban álló strukturális elemek.

A rendszerezési képesség összpontszáma a kombinatív képességgel $r_{KR}=0,79$ szinten korrelál, ami pontosan megegyezik a logikai képesség-kombinatív képesség korrelációval. A pontos egyezés természetesen véletlen, de az mindenképp igaz, hogy a kombinatív képességgel azonos szorosságú összefüggést mutatnak. Megjegyezzük még, hogy a logikai és a rendszerezési képesség közötti korreláció $r_{LR}=0,76$, vagyis az előzőekhez hasonló nagyságú, de valamivel mégis kisebb. A korrelációknak ez az aránya megfelel az elméletileg feltételezhető rendszerezési-kombinatív-logikai felépülési sorozatnak.

A többszörös korrelációs együttható: $R=0,8670$; a logikai és a rendszerezési képesség tesztjeinek eredményei a kombinatív képesség varianciájának 75,34%-át magyarázzák meg ($r^2=0,7534$). A megmagyarázott varianciához ($R^2=\sum r^2$) a logikai képesség tesztjei (36%) és a rendszerezési képesség tesztjei (39%) közel azonos arányban járulnak hozzá.

9.3 A tanulmányi eredmények és a társadalmi háttér

A többszörös regresszióanalízis alkalmazása során a független változók számának megválasztását két egymással ellentétes szempont befolyásolja. Kevés változót használva egy-egy változónál esetenként nagy regressziós együttthatók adódhatnak, viszont kevésbé érvényesül a módszer legnagyobb ereje, az "átfedő kapcsolatok lefejtése"-nek lehetősége. Sok független változó a teljes variancia nagyobb hányadát magyarázhatja, viszont előfordulhat, hogy a változók többségére az átfedések lefejtése után már csak nagyon kicsi, esetleg nem is szignifikáns hatás jut, a teljes megmagyarázott variancia sokfelé "darabolódik".

Hogy az iskolai tantárgyakban elért eredményeknek és a társadalmi háttér változóinak együtteséből képezett független változók rendszerével végzett regresszióanalízist mutatjuk be, annak az előző megfontolásokon túl más okai is vannak. Pedagógiai vizsgálatok sokasága bizonyítja ugyanis, hogy bizonyos környezeti tényezők és a tanulmányi eredmények között szoros kapcsolat van. Ezek közül a legfontosabb a szülők, elsősorban az anya iskolai végzettsége. A tanulmányi eredményeket és a társadalmi háttér jellemzőit együttesen használva független változóként a két változócsoport átfedő hatásait is kiszűrhetjük. Hasonló okokból felvettük még a tanuló nemét, továbbtanulási szándékát, osztályának létszámát mint független változót, valamint azt is, hogy a matematikát a régi vagy az új tanterv szerint tanulja.

Ha a hatás irányát kívánjuk meghatározni, az a tanulmányi eredményeknél nem állapítható meg egyértelműen, mindkét irányú hatás feltételezhető. Egyrészt nagyon valószínű, hogy a műveleti képességek fejlettségének szintje befolyásolja a tanulmányi eredményeket. Másrészt lehetséges, hogy együttváltozásuknak közös okai vannak. Például valamely tantárgy iránti érdeklődés, annak intenzívebb tanulása vagy színvonalas oktatása mind a műveleti képességek fejlődéséhez hozzájárulhat, mind pedig a tanulmányi eredményt befolyásolhatja.

A független változók második csoportjánál már egyértelmű a helyzet. A továbbtanulási szándék kivételével (ahol elvileg mindkét irányú hatás elképzelhető) egyértelműen a független változók gyakorol(hat)nak hatást a kombinatív képesség fejlődésére, és nem megfordítva, a kombinatív képesség fejlettsége a tanulók nemére, lakóhelyének településjellegére, szülei iskolázottságára stb.

A többszörös regresszióanalízis eredményeit a 21. táblázatban foglaltuk össze. A tantárgyakban elért eredményeket az 5-8. osztály eredményeinek átlagával jellemeztük. A pedagógusok mindennapos tapasztalata az, hogy különböző tantárgyak eredményei között nagyon szoros az összefüggés. A tantárgyak eredményeinek korrelációs együttthatói 0,5-0,9 között vannak, de többnyire 0,9 fölött. Ebből technikailag az következik, hogy a korrelációs

21. táblázat. A tanulmányi eredmények és a társadalmi háttér hatása a kombinatív képességre (többszörös regresszió)

FÜGGŐ VÁLTOZÓ: Kombinatív képesség					
Független változók	r	β	r· β	t érték	Szignifikancia (p=0,05)
Magyar	0,5717	0,0046	0,0260	0,04	! igen
Orosz	0,6074	0,2153	0,1308	2,51	
Történelem	0,5782	0,0527	0,0305	0,52	
Földrajz	0,5595	-0,0617	-0,0345	0,51	
Matematika	0,5702	0,2084	0,1188	1,93	
Fizika	0,6259	0,3376	0,2113	3,05	
Kémia	0,5456	-0,0970	-0,0529	1,03	
Élővilág	0,5833	-0,1359	-0,0793	1,20	
Gyakorlati	0,4150	-0,0175	-0,0073	0,26	
Rajz	0,4155	-0,0352	-0,0146	0,49	
Ének-zene	0,4855	-0,0583	-0,0283	0,84	
Testnevelés	0,4160	0,1283	0,0534	2,45	
Nem	0,2938	0,1768	0,0519	3,52	igen
Továbbtanulási szándék	0,5203	0,0616	0,0321	0,92	igen
Településjelleg	-0,0665	-0,2078	0,0138	4,18	
Apa iskolai végz.	0,3156	0,0694	0,0219	1,04	
Anya isk. végz.	0,3995	0,0366	0,0134	0,48	igen
Apa fogl.	0,3023	0,0208	0,0063	0,32	
Anya fogl.	0,2867	0,0190	0,0054	0,28	
Osztálylétszám	0,2797	0,2536	0,0709	5,25	
Régi/új matematika	0,1622	0,0273	0,0044	0,53	
R=0,7429		R ² =0,5519		igen	

! p=0,1 valószínűségi szinten szignifikáns

mátrix determinánása 0-hoz közel eső érték lesz, ami pedig a regresszióanalízis eredményeit nagyon érzékennyé teszi a változórendszer átalakítására. Újabb független változók bevonása/elhagyása jelentősen átrendezheti a regressziós együtthatók értékeit. Előfordulhat, hogy az $r\cdot\beta$ szorzat értéke negatív (pozitív r -hez negatív β tartozik, vagy megfordítva) lesz. Ez úgy állhat elő, hogy valamelyik független változó "átveszi" a hiányzó hatást. Ha a negatív $r\cdot\beta$ érték szignifikáns, az úgy interpretálható, hogy a megfelelő változónak a varianciát csökkentő (nivelláló, homogenizáló) hatása van.

A tantárgyak közül háromnál találtuk azt, hogy a tanulmányi eredménynek a kombinatív képességre szignifikáns hatása van. Az orosz nyelv a variancia 13,08%-át, a fizika 21,13%-át, a testnevelés 5,3%-át magyarázza. A várakozással ellentétben a matematikának $p=0,05$ valószínűségi szinten nincs szignifikáns hatása. A $p=0,1$ szinten a matematika hatása is szignifikáns, és a variancia 11,88 százalékáért felelős. Meg kell jegyeznünk, hogy több tantárgynál fordul elő negatív $r\cdot\beta$ érték, a hiányzó hatást valószínűleg egy másik tantárgy hordozza.

A fizika 21,13%-os hatása nem szorul különösebb magyarázatra. Kérdéses azonban a testnevelés szerepe, bár nincs kizárva, hogy az ügyesség, bizonyos fizikai képességek szerepet játszhatnak a kombinatív képesség fejlődésében. Végképp nem magyarázható viszont az orosz nyelv hatása, különösen ha nyelvtanításunk ismert fogyatékoságait is tekintetbe vesszük. E két utóbbi tárgynál (és még ebbe a csoportba tartozhat az ének) inkább lehet szó arról, hogy a teljesítmények nehezebben megítélhető jellege miatt a pedagógus hajlamos az osztályzatokat a többi tárgy érdemjegyeinek irányába kerekíteni, így ezek a tárgyak sok más tárggyal korrelálva pusztán számítástechnikai okokból jelentős hatások hordozóivá válnak. A szoros belső korrelációk jelzett problémái miatt érdemes ebben az esetben a változók rendszerének átalakításával kísérleteznünk.

A független változók másik csoportjánál nem fordulnak elő negatív $r\cdot\beta$ értékek.

A tanulók neme 5,19% összes hatással szignifikánsan befolyásolja a kombinatív képességet. Ez azt jelenti, hogy a lányok eredményesebbek voltak tesztjeink megoldásában, mint a fiúk.

A településjelleg esetében az az érdekes helyzet áll elő, hogy egy nem szignifikáns korrelációhoz szignifikáns β tartozik. A negatív r és β azt jelzi, hogy a falusi gyerekek teljesítményei a kombinatív képesség tekintetében jobbak, mint városi társaiké. E tényező teljes hatása azonban csak 1,38%.

A harmadik szignifikáns hatást az osztálylétszám esetében találtuk: 7,09%. Ez eléggé meglepő, mivel azt jelenti, hogy a magasabb létszámú osztályok tanulói eredményesebbek voltak a kombinatív feladatok megoldásában. A jelenség szintjén ez kétségtelen tény, jelzi ezt a szignifikáns, bár meglehetősen alacsony korrelációs együttható. Segít a jelenség mögé látni, ha a ténynt úgy

fogalmazzuk meg, hogy a jobban teljesítő osztályok magasabb létszámmal működnek. Arról lehet tehát szó, hogy a "jobb" iskolák "jobb" osztályai a társadalmi közeg nyomásának hatására egyrészt válogathatnak a jelentkezők között, másrészt a szokásosnál több tanulót kénytelenek felvenni. Megerősíti e feltételezést, hogy a szülők iskolázottsága is korrelál az osztálylétszámmal, továbbá a mintában szereplő iskolákkal kapcsolatos személyes tapasztalatunk.

Figyelemreméltó az is, hogy sem a szülők foglalkozásának, sem iskolai végzettségének nincs szignifikáns hatása a kombinatív képességre. Ez az eredmény váratlan, hiszen mind a tanulmányi eredmények, mind pedig a különböző képességtesztek eredményei a háttérváltozók közül e változóktól függenek a legnagyobb mértékben. Erdemes tehát a lehetséges okokat alaposabban megfontolni.

Egyrészt lehetséges, hogy a kombinatív képesség fejlettsége valóban kevésbé függ a szülők iskolázottságától, mint sok más gyakorta mért mentális teljesítmény. Ebben az esetben előfordulhat, hogy a kombinatív műveletek a gondolkodás olyan összetevői közé tartoznak, amelyek fejlődésében kevésbé érvényesül a szociokulturális öröklődés hatása, biológiailag determináltak, vagy a környezetnek általunk figyelembe nem vett tényezőitől függenek. A közepesnél alacsonyabb korrelációs együtthatók azt sugallják, hogy e feltételezéseknek van némi realitása.

Másrészt lehetséges, hogy valamilyen számítástechnikai oka van annak, hogy a szóban forgó hatást nem jelzik az eredmények. A korrelációhoz képest kis β alapján várható, hogy a "hiányzó" hatást valamelyik másik változó hordozza, mégpedig valószínűleg éppen az osztálylétszám. A szülők iskolázottsága és az osztálylétszám közötti összefüggés által kiváltott sajátos artefaktról lehet szó. A teljes összefüggésrendszert áttekintve a legvalószínűbbnek az tűnik, hogy mindkét ok szerepet játszik.

Érdekes, hogy a változóknak ebben a rendszerében annak sincs jelentős hatása, hogy a tanulók a régi vagy az új matematika tanterv szerint tanultak. Maga a korrelációs együttható is nagyon alacsony ($r=0,16$), éppen csak szignifikáns. Meg kell jegyeznünk, hogy a mintánkban szereplő nyolcadikosok az új matematikának még csak az ideiglenes változatát tanulták, azt is csak a felső tagozatban, lehetséges, hogy hatása ezért nem érvényesül.

A tanulmányi eredményekből és a további háttérváltozókból álló változórendszerrel a teljes varianciának összesen 55,19%-át sikerült megmagyaráznunk. Ebben a változórendszerben a hatás nagyobbik részét a tantárgyak eredményei hordozzák.

Összehasonlítva az előző pontban elvégzett elemzéssel, megállapíthatjuk, hogy a logikai és a rendszerezési képesség a variancia nagyobb hányadát (75,34%) magyarázza, mint az e pontban használt független változók.

9.4 A független változók együttes hatása

Az előző pontokban már jelzett körülmények miatt érdemes regresszióanalízist végezni az összes független változó felhasználásával is. A független változók teljes rendszerét a 9.2 és a 9.3 pontokban használt független változók összevonásával kapjuk.

Az összes független változó felhasználásával végzett regresszióanalízis adatait a 22. táblázat tartalmazza. Az eredményeket a 20. és a 21. táblázatok adataival összevetve érdemes szemügyre vennünk, kiemelve az egyezéseket és a különbségeket.

A logikai képesség komponensei közül a "Feltételképzés" és az "Általános következtetés" hatása itt is szignifikáns, a "Választás" hatása csak $p=0,1$ szinten szignifikáns. A regressziós együtthatók kismértékben arányosan csökkentek, az újabb független változók bevonása tehát a logikai képesség komponenseinek szerepét nem változtatta meg lényegesen.

A rendszerezési képesség tesztjeit illetően az egyetlen lényeges különbség az, hogy itt a "Viszonyítás" teszt eredményei is szignifikánsak 4,95% összes hatással.

A tantárgyak hatásában, ahogy az várható volt, lényeges átrendeződés ment végbe. Szignifikáns lett a matematika 9,28%-os összes hatással, valamint az ének-zene -5,72% összes hatással. Itt nincs jelentős hatása az oroszoknak, a legnagyobb változás azonban a fizika szerepében következett be. Nemcsak elvesztette szignifikáns pozitív hatását, hanem a regressziós együttható még negatív is lett. Erről a legvalószínűbb magyarázat az lehet, hogy az előző elemzésekben a fizika által közvetített hatást a matematika, illetve a logikai és a rendszerezési képesség vette át.

A háttérváltozókkal kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy nem szignifikáns hatású a tanulók neme. Jelentős, mégpedig a korábban (ld. 21. táblázat) kimutatottnál nagyobb a településjelleg hatása: 8,7%. Itt is szignifikáns az osztálylétszám, de a varianciának csupán 4,36%-át magyarázza meg. Az előzőekhez hasonlóan nincs szignifikáns hatása a szülők foglalkozásának, illetve iskolázottságának. Valószínűleg itt is a korábban elemzett hatások, illetve artefaktok fellépésével számolhatunk.

A független változók négy csoportját összehasonlítva ebben a változórendszerben a rendszerezési képesség összetevői gyakorolják a legnagyobb hatást a kombinatív képességre. Összesen a variancia mintegy 37%-át magyarázzák. A logikai képesség tesztjeinek együttes hatása 29%. A háttérváltozók további 11%-kal járulnak hozzá a megmagyarázott varianciához, a tanulmányi eredmények hatása pedig kevesebb, mint 3%. A független változók számának bővítése legkevésbé a rendszerezési képességre eső megmagyarázott variancia arányát csökkentette, a tantárgyak eredményeinek viszont alig maradt önálló hozzájárulása a kombinatív képesség varianciájának megmagyarázásához.

22. táblázat. Az összes független változó hatása a kombinatív képességre
(többszörös regresszió)

FÜGGŐ VÁLTOZÓ: Kombinatív képesség					
Független változók	r	β	r $\cdot\beta$	t érték	Szignifikancia (p=0,05)
Kapcsolás	0,5871	0,0149	0,0087	0,35	
Választás	0,7003	0,1004	0,0703	1,96	!
Feltételképzés	0,6591	0,0941	0,0620	2,10	igen
Egyedi következtetés	0,6069	0,0097	0,0059	0,24	
Általános következtetés	0,7326	0,1985	0,1454	0,34	igen
Szemponképzés	0,6549	0,0000	0,0000	0,00	
Viszonyítás	0,5503	0,0900	0,0495	2,39	igen
Sorképzés (nyelvi)	0,5395	-0,0872	0,0470	2,37	igen
Besorolás (nyelvi)	0,4414	-0,0003	-0,0001	0,01	
Halmazképzés (nyelvi)	0,7241	0,2087	0,1511	4,44	igen
Osztályozás (nyelvi)	0,6815	0,1556	0,1060	3,80	igen
Besorolás (képi)	0,4123	0,0565	0,0233	1,65	!
Halmazképzés (képi)	0,5235	-0,0166	0,0087	0,49	
Osztályozás (képi)	0,1442	-0,0009	-0,0001	0,03	
Magyar	0,5717	-0,0022	-0,0013	0,03	
Orosz	0,6075	0,0702	0,0426	1,16	
Történelem	0,5782	0,0533	0,0308	0,74	
Földrajz	0,5595	0,0102	0,0057	0,12	
Matematika	0,5702	0,1628	0,0928	2,11	igen
Fizika	0,6259	-0,0405	-0,0253	0,49	
Kémia	0,5456	-0,0251	-0,0137	0,36	
Élővilág	0,5833	-0,1475	-0,0860	1,78	!
Gyakorlati	0,4150	0,0522	0,0217	1,06	
Rajz	0,4155	-0,0159	-0,0066	0,31	
Ének-zene	0,4853	-0,1178	-0,0572	2,39	igen
Testnevelés	0,4160	0,0844	0,0351	2,26	igen
Nem	0,2938	0,0269	0,0079	0,74	
Továbbtanulás	0,5203	0,0276	0,0144	0,59	
Településjelleg	-0,0665	-0,1304	0,0087	3,61	igen
Apa iskolai végz.	0,3156	0,0897	0,0283	1,90	!
Anyai iskolai végz.	0,3995	0,0516	0,0206	0,97	
Apa foglalkozása	0,3023	-0,0428	-0,0129	0,93	
Anyai foglalkozása	0,2867	-0,0596	-0,0171	1,26	
Osztálylétszám	0,2797	0,1560	0,0436	4,35	igen
Régi/új matematika	0,1622	0,0207	0,0034	0,53	
R = 0,8921		R ² = 0,7958		igen	

! p = 0,1 valószínűségi szinten szignifikáns

A többszörös korrelációs együttható $R=0,8921$, tehát a 35 független változó együttesen a variancia 79,58, kerekítve 80%-át magyarázza meg. A hatás nagy részét azonban már a kombinatív és a logikai képesség magyarázza (75,34%, ld. 20. táblázat). A tantárgyak és a háttérváltozók bevonása független változóként csupán 4,2%-kal növelte a megmagyarázott varianciát. Természetesen nem feledkezhetünk meg arról, hogy az utóbbiak a valóban független változók, s a rendszerezési és a logikai képesség komponensei részben ezek hatását közvetítik.

IRODALOM

- Allaire-Dagenais, L. (1985): Combinatorial and proportional reasoning in 12 to 16-year-old students
Abstracts of paper presentations of 8th Biennial Meetings of ISSBD, Tours, July 6-10. 1985.
Cahiers de Psychologie Cognitive, Vol. 5. 437. p.
- Barratt, B.B. (1975): Training and transfer in combinatorial problem solving: The development of formal reasoning during early adolescence
Developmental Psychology, 11, 700-704. p.
- Bácskai Zoltán (1971): *Matematika*
Központi Statisztikai Hivatal, Budapest
- Bruner, B.S., Goodnow, J.J. and Austin, G.A. (1956): *A Study of Thinking*
New York, John Wiley
- Bruner, J.S. (1973): *Beyond the Information Given*
London, Georg Allen and Unwin
- Campbell, R.L. and Richie, D.M. (1983): Problems in the theory of developmental sequences (Prerequisites and precursors)
Human Development, 26, 152-172. p.
- Cohen, D. (1983): *Piaget: Critique and Reassessment*
London, Crom Helm
- Czapáry Endre és mtsi. (1974): *Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák 4. osztálya számára*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Csapó Benő (1979): *A kombinatív képesség és értékelésének feltételei*
Acta Univ. Szeg., Ser. Specifica Paedagogica
JATE, Szeged
- Csapó Benő (1981): A kombinatív képesség
In: *A XVIII. Szegedi Pedagógiai Nyári Egyetem Előadásai*
Szeged, 219-232. p.
- Csapó Benő (1982): A kombinatív képesség számítógépes vizsgálata
In: *Szegedi Bölcsész-műhely '82*
JATE, Szeged, 79-94. p.
- Csapó Benő (1983a): A gondolkodás műveleti képességeinek rendszere és fejlődése
Köznevelés, 39. évf. 38. sz. 15. p.

- Csapó Benő (1983b): A kombinatív képesség és műveleteinek vizsgálata 14 éves tanulónál
Magyar Pedagógia, 1. sz. 31-50. p.
- Csapó Benő (1983c): A kombinatív képesség bonyolult rendszerként való leírásának stratégiája
Acta Univ. Szeg. de A.J. nom Sectio Paed. et Psych. No. 25. 97-113. p.
- Csapó Benő (1985a): A kombinatív műveletek fejlődése 10-17 éves korban
Magyar Pszichológiai Társaság VII. Országos Tudományos Konferenciája (Előadaskivonatok), Budapest, 36. p.
- Csapó Benő (1985b): Development of combinatoric operations from 10 to 17 years of age
 Abstracts of paper presentations of 8th Biennial Meetings of ISSBD, Tours, July 6-10 1985.
Cahiers de Psychologie Cognitive, Vol. 5. 439-440. p.
- Csapó Benő (1985c): Untersuchung der kombinatorischen Fähigkeit und ihrer Operationen bei 14-jährigen Kindern
 In: H.J. Henning and P.K.G. Günther (eds.): *Casual and Soft Modeling* (Ergebnissband der 2. Bremer Methodenkonferenz, 1984)
Bremer Beiträge zur Psychologie, Nr. 43. 29-75. p.
- Csapó Benő (1985d): A struktúra és a tartalom szerepének vizsgálata izomorf kombinatorikai feladatokban
Magyar Pszichológiai Szemle, 1. sz. 19-34. p.
- Csapó Benő (1986): A gondolkodás műveleti képességeinek fejlődése és fejlesztése
Magyar Pszichológiai Társaság VIII. Országos Tudományos Konferenciája, (Előadaskivonatok), Budapest, 17. p.
- Csapó Benő (1987a): A gondolkodás műveleti képességeinek fejlesztése az iskolai tantárgyak keretében
Pedagógiai Szemle, 7/8. sz. 652-660. p.
- Csapó Benő (1987b): A kombinatív képesség fejlesztése az általános iskolában
Pedagógiai Szemle, 9. sz. 844-853. p.
- Csapó Benő (1987c): Kísérlet a műveleti képességek fejleszthetőségének vizsgálatára
Acta Univ. Szeg. de A.J. nom Sectio Paed. et Psych. No. 29, 51-63. p.
- Csapó Benő (1987d): Representing the qualitative characteristics of the reasoning by qualitative data. Two examples from the field of operational abilities: combinative and logical operations
Bremer Beiträge zur Psychologie, megjelenés alatt
- Csapó Benő (1988): A kritérium-orientált értékelés
Magyar Pedagógia, megjelenés alatt

- Csapó Benő – Csirikné Czachesz Erzsébet – Vidákovich Tibor (1986): Qualitative analysis of logical reasoning
In.: Grazia Attili (ed.): *Development: European Perspectives* (Abstracts, Second European Conference, Rome, 10th-13th Sept. 1986) 175. p.
- Csapó Benő – Csirikné Czachesz Erzsébet – Vidákovich Tibor (1987):
A nyelvi logikai műveletrendszer fejlettsége 14 éves korban
Pszichológia, 4. sz. 521-544. p.
- Csirikné Czachesz Erzsébet (1983): A logikai képességek mérési lehetőségeiről
In: *Szegedi Bölcsész-műhely '82*
JATE, Szeged, 95-111. p.
- Csirikné Czachesz Erzsébet (1986): Gondolkodási stratégiák 14 éves tanulók nyelvlogikai műveleteiben
Magyar Pedagógia, 1. sz. 62-76. p.
- Csirikné Czachesz Erzsébet (1988): *A nyelvi-logikai műveletrendszer struktúrája és fejlődése*
Előkészületben
- Denkinger Géza (1968): *Valószínűség-számítás*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Dienes, Z.P. and Jeeves, M.A. (1970): *The effects of structural relations on transfer*
Hutchinson Educational Ltd., London, etc.
- Feldman, C. F. and Toulmin, S. (1976): Logic and theory of mind
In: Arnold, W.J. (ed.): *Nebraska Symposium on Motivation 1975*.
Conceptual Foundations of Psychology
Nebraska, Lincoln, 409-476. p.
- Fischbein, E., Pampu, I. and Minzat, I. (1970): Effects of age and instruction on combinatory ability in children
British Journal of Educational Psychology, 40, 261-270. p.
- Flexer, B.K. and Roberge, J.J. (1980): IQ, field dependence-independence, and the development of formal operational thought
The Journal of General Psychology, 103, 191-201. p.
- Flexer, B.K. and Roberge, J.J. (1983): A longitudinal investigation of field dependence-independence and the development of formal operational thought
British Journal of Educational Psychology, 53, 195-204. p.
- Franus, E. (1979): A képzelet szerepe az alkotó gondolkodásban
In: Salamon Jenő (szerk.): *Az alkotó gondolkodás kutatási problémái*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Froman, T. and Hubert, J. (1980): Application of prediction analysis to developmental priority
Psychological Bulletin, Vol. 87. No. 1. 130-146. p.

- Fuchs László (1963): *Bevezetés az algebra és a számelméletbe*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Galperin, P. (1966): Az értelmi cselekvések kialakulására irányuló kutatások fejlődése
Magyar Filozófiai Szemle, 1. sz.
- Galperin, P. (1974): A gyermek értelmi fejlődésének tanulmányozásához
In: *A pszichikum és a tevékenység a mai szovjet pszichológiában*
Gondolat Kiadó, Budapest
- Gáspár Gyula (1968, szerk.): *Műszaki matematika*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Greer, G.B. (1983): The symbolised rotations test
Journal of Structural Learning, Vol. 7. 193-206. p.
- Guilford, J.P. (1950): Creativity
American Psychologist, Vol. 5. 444-454. p.
- Guilford, J.P. (1959): Traits of creativity
In: Anderson, H.H. (ed.): *Creativity and its Cultivation*
London, Harper, 142-161. p.
- Guilford, J.P. (1965): *Fundamental Statistics in Psychology and Education*
New York, McGraw-Hill
- Günther, P. and Henning, H.J. (1983): Current methodological issues in developmental psychology. A reader.
Bremer Beiträge zur Psychologie, Nr. 22.
- Gyapjas Ferenc (1972): *A kombinatorika és a valószínűségyszámítás tanításának módszertana*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Hayes, J.R. – Simon, H.A. (1970): Psychological differences among problem isomorphs
In: Castellan, N.J., Pisoni, D.B. and Potts, G.R. (Eds.):
Cognitive Theory 2. 27-42. p.
Hillsdale, H. Erlbaum
- Henning, H.J. und Peterman, F. (1983): Zur Methodologie der Vorhersageanalyse (DEL-Analyse) bei Einzelfalldaten
Bremer Beiträge zur Psychologie, Nr. 22. 6/83.
- Henning, H.J. and Günther, P.K.G. (1985, eds.): Causal and Soft Modeling.
Ergebnissband der 2. Bremer Methodenkonferenz 1984
Bremer Beiträge zur Psychologie, Nr. 43. Univ.
- Henning, H.J. and Rudinger, G. (1985): Analysis of qualitative data in developmental psychology
In: Nesselroade, J.R. and von Eye, A. (Eds.): *Individual development and social change*
New York, Academic Press

- Henriques, J., Christophides, A. et Moreau, A. (1974): Quelques données nouvelles sur les opérations combinatoires et la pensée formelle
Cahiers de Psychologie, 17, 55-64. p.
- Inhelder, B. – Piaget, J. (1967): *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Johnson-Laird, P.N. (1983): *Mental Models*. Towards a cognitive science of language, inference and consciousness
Cambridge, Massachusets, Harvard University Press
- Kamp, L.J.Th. van der (1976): Generalizability and educational measurement
In: Gruijter, D.N.M. de and Kamp, L.J.Th. (Eds.): *Advances in Psychological and Educational Measurement*
London, etc., John Wiley and Sons
- Keats, J.A., Collis K.F. and Halford, G.S. (1978): *Cognitive Development*. Research based on Neo-Piagetian approach
Chichester, New York, etc., John Wiley and Sons
- Kemény, J.G. – Snell, F.L. – Thompson, F. (1971): *A modern matematika* (Véges struktúrák)
Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Kingma, J. and Reuvekamp, J. (1984): The construction of a developmental scale for seriation
Educational and Psychological Measurement, Vol. 44. 1-26. p.
- Kishta, M.A. (1979): Proportional and combinatorial reasoning in two cultures
Journal of Research in Science Teaching, 16, 5, 439-443. p.
- Klahr, D. and Wallace, J.G. (1976): *Cognitive Development. An information-processing view*
Hillsdale, New Jersey Lawrence Erlbaum Associates, Publishers
- Kürti Istvánné (1982): *Tervek, hipotézisek, stratégiák a 9-14 éves tanulók gondolkodásában*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Landau, E. (1974): *A kreativitás pszichológiája*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Leontyev, A.Ny. (1979): *Tevékenység, tudat, személyiség*
Gondolat Kiadó, Budapest
- Lénárd Ferenc (1978): *A problémamegoldó gondolkodás*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Lénárd Ferenc (1982): *Az absztrakció kialakítása kisiskolás korban*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Lienert, G.A. (1967): *Testaufbau und Testanalyse*
Weinheim und Berlin, Julius Beltz
- Lord, F.M. and Novick M.R. (1968): *Statistical Theories of Mental Test Scores*
London, etc., Addison Wesley Publishing Company

- Lovász László – Vesztergombi Katalin – Pelikán József (1971): *Kombinatorika az általános és középiskolai matematika szakkörök számára*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Lowenfeld, V. (1947): *Creative and Mental Growth*
London, The Macmillan Company
- A magyar nyelv értelmező szótára
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1961
- Mednick, S.A. (1962): The associative basis of the creative process
Psychological Review, Vol. 69. 220-232. p.
- Mendelsohn, P. (1980): Pensée naturelle et logique combinatoire (Etude expérimentale des procédures de permutations d'objects)
Mathematiques Appliquées et Informatique, No. 14.
Université Scientifique et Médicale et Institut National Polytechnique de Grenoble
- Mendelsohn, P. (1981): Analyse procédurale et analyse structurale des activités de permutation d'objects
Archives de Psychologie, Vol. 49. 171-197. p.
- Miles, M.B. and Huberman, A.M. (1984): *Qualitative Data Analysis*. A source-book of new methods
London, Sage Publications
- Modgil, S. and Modgil, C. (1982): *Jean Piaget: Consensus and controversy*
London, New York, Toronto, Holt, Rinehart and Winston
- Nagy József (1980a): A tudás létezési módjai, megjelenési formái és funkciói
Acta Univ. Szeg. de A.J nom. Sectio Paed et Psych. 22.
- Nagy József (1980b): *5-6 éves gyermekeink iskolakészültsége*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Nagy József (1981): Rendszerezési képesség
In: *A XVII. Szegedi Pedagógiai Nyári Egyetem Előadásai*
Szeged, 197-218. p.
- Nagy József (1985): A tudástechnológia elméleti alapjai
Országos Oktatástechnikai Központ, Veszprém
- Nagy József (1987): *A rendszerezési képesség kialakulása. Gondolkodási műveletek*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Nagy József – Gubán Gyula (1987): A rendszerezési képesség fejlesztése az általános iskolában
Pedagógiai Szemle, 11. sz.
- Nosofsky, R.M. (1984): Choice, similarity, and the context theory of classification
Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition
Vol. 10, No. 1, 104-114. p.

- Piaget, J. – Inhelder, B. (1951): *La genese de l'idée de hasard chez l'enfant*
Presses Universitaires de France, Paris
- Piaget, J. (1970): *Válogatott tanulmányok*
Gondolat Könyvkiadó, Budapest
- Piaget, J. (1971): *Structuralism*
London, Routledge and Kegan Paul
- Piaget, J. (1972): *Psychology and Epistemology*
London, Penguin Books
- Poincaré, H. (1908): Mathematical creation
In: Vernon, P. (ed.): *Creativity*
London, etc., Penguin Books Ltd. 1978.
- Popham, W.J. (1978): *Criterion Referenced Measurement*
New Jersey, Prentice-Hall Inc.
- Roberge, J.J. (1976): Developmental analyses of two formal operational structures: Combinatorial thinking and conditional reasoning
Developmental Psychology, Vol. 12. No. 6. 563-564. p.
- Roberge, J.J. and Flexer, B.K. (1979): Further examination of formal operational reasoning abilities
Child Development, 50, 478-483. p.
- Roberge, J.J. and Flexer, B.K. (1982): The formal operational reasoning test
The Journal of General Psychology, 106, 61-67. p.
- Rubinstein, Sz.L. (1964): *Az általános pszichológia alapjai*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Rudinger, G., Chaselon F., Zimmermann, E.J. und Henning, H.J. (1985):
Qualitative Daten
Neue Wege sozialwissenschaftlicher Methodik
München, Wien, Baltimore, Urban and Schwarzenberg
- Ryser, H.J. (1963): *Combinatorial Mathematics*
Rahway, New Jersey, Quinn and Boden Company, Inc.
- Salamon Jenő (1973): *A gyakorlati problémamegoldás fejlődése 6-14 éves korban*
Akadémiai Kiadó, Budapest
- Scardamalia, M. (1977): Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks
Child Development, Vol. 48. 28-37. p.
- Siegler, R.S. and Liebert, R.M. (1975): Acquisition of formal scientific reasoning by 10- and 13-year olds: Designing a factorial experiment
Developmental Psychology, Vol. 11, No. 3. 401-402. p.
- Simon, H.A. and Hayes, J.R. (1973): The Understanding Process: Problem Isomorphs
Cognitive Psychology, 8. 165-190. p.
- Sváb János (1979): *Többváltozós módszerek a biometriában*
Mezőgazdasági Kiadó, Budapest

- Szele Tibor (1970): *Bevezetés az algebrába*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Szendrei János (1974): *Algebra és számelmélet*
Tankönyvkiadó, Budapest
- Tomescu, I. (1978): *Kombinatorika és alkalmazásai*
Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Türke, W. (1967): Kombinatorika tanítása az alsó tagozaton
A Matematika Tanítása, 114. 3. sz. 65-72. p.
- Varga Tamás (1967): *Combinatorials and probability for young Children. Part I.*
Scherbrooke, The International Study Group for Mathematics Learning
- Vidákovich Tibor (1987): A logikai képességek fejlesztése: feladatok és lehetőségek
Pedagógiai Szemle, 10. sz. 1038-1046. p.
- Vigotszkij, L.Sz. (1971): *A magasabb pszichikus funkciók fejlődése*
Godolat Könyvkiadó, Budapest
- Vilenkin, N.J. (1971): *Kombinatorika*
Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Williams, J.D. (1983): Characteristics of the open matrices
Journal of Structural Learning, Vol. 7. 207-211. p.

Ábrák jegyzéke

1. A kombinatív műveletek hipotetikus rendszere	32
2. A Descartes-féle szorzatok képzésének d feladata manipulatív tartalommal	41
3. A Descartes-féle szorzatok képzésének d feladata képi tartalommal	42
4. Az adattömb felépítése	50
5. A 14 éves minta megoszlása	52
6. A vizsgálat feladat- és adatrendszere	56
7. A manipulatív feladatok fejlődési görbéi	66
8. A manipulatív feladatok fejlődési görbéi	67
9. A manipulatív szubtesztok eloszlásai	70
10. A manipulatív szubtesztok eloszlásai	71
11. A manipulatív feladatok klaszteranalízise	77
12. A manipulatív "VARIÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása	79
13. A manipulatív "KOMBINÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása	80
14. A manipulatív teljesítmények eloszlása	81
15. A képi feladatok fejlődési görbéi	88
16. A képi feladatok fejlődési görbéi	89
17. A képi szubtesztok eloszlásai	92
18. A képi szubtesztok eloszlásai	93
19. A képi feladatok klaszteranalízise	99
20. A képi "VARIÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása	101
21. A képi "KOMBINÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása	101
22. A képi teljesítmények eloszlása	102
23. A formális feladatok fejlődési görbéi	108
24. A formális feladatok fejlődési görbéi	109
25. A formális szubtesztok eloszlásai	112
26. A formális szubtesztok eloszlásai	113
27. A formális feladatok klaszteranalízise	119
28. A formális "VARIÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása	121
29. A formális "KOMBINÁLÁS" teszt eredményeinek eloszlása	121
30. A formális teljesítmények eloszlása	122
31. A különböző tartalmú feladatrendszerek és tesztek összefüggései	124
32. Az azonos tartalmú szubtesztok kapcsolatainak összehasonlítása	128
33. A szubtesztok klaszteranalízise	130
34. A feladatok eredményei a feladatok mennyiségi jellemzőinek függvényében	132
35. A kombinatív műveletek fejlődése	134
36. A kombinatív képesség fejlődése	136
37. A kombinatív képesség fejlettségének eloszlása 14 éves korban	137
38. A tartalom hatása a szubtesztok eredményeire	142
39. Izomorf feladatok eredményeinek alakulása a struktúra és a tartalom függvényében	144

Táblázatok jegyzéke

1. A 16 kétváltozós logikai művelet kombinatorikai szerkezete	16
2. A "VARIÁLÁS" tesztek feladatainak szerkezete	36
3. A "KOMBINÁLÁS" tesztek feladatainak szerkezete	37
4. Konzisztencia-mutatók a Gulliksen-formula alapján	46
5. A manipulatív "VARIÁLÁS" teszt feladatainak eredményei	60
6. A manipulatív "KOMBINÁLÁS" teszt feladatainak eredményei	61
7. A manipulatív szubtesztek belső korrelációi	73
8. A manipulatív feladatok korrelációi	75
9. A képi "VARIÁLÁS" teszt feladatainak eredményei	84
10. A képi "KOMBINÁLÁS" teszt feladatainak eredményei	85
11. A képi szubtesztek belső korrelációi	95
12. A képi feladatok korrelációi	97
13. A formális "VARIÁLÁS" teszt feladatainak eredményei	104
14. A formális "KOMBINÁLÁS" teszt feladatainak eredményei	105
15. A formális szubtesztek belső korrelációi	115
16. A formális feladatok korrelációi	117
17. A szubtesztek közötti korrelációs együtthatók	127
18. A különböző tartalmú feladatok összehasonlítása	141
19. A DELTA analízis kiinduló adatai és eredményei	146
20. A logikai és a rendszerezési képesség hatása a kombinatív képességre	152
21. A tanulmányi eredmények és a társadalmi háttér hatása a kombinatív képességre	155
22. Az összes független változó hatása a kombinatív képességre	159

Jelölések és rövidítések jegyzéke

Jelölések

x	= a felsorolt jó konstrukciók száma
z	= a feleslegesen előállított (ismétlődő) konstrukciók
T	= a feladatokban maximálisan előállítható különböző konstrukciók száma
J	= a feladat megoldásának jósága, $J = [x \cdot (T - y)] / T^2$, ha $y > T$ akkor $J = 0$
G	= a megoldás jóságának súlyozott mutatója, $G = J \cdot T$
x, J, G	= a megfelelő változók középértéke
s	= szórás
s^2	= szórásnégyzet (variancia)
$CV\%$	= relatív szórás százalékban (variációs koefficiens)
r	= korrelációs együttható
r_{rel}	= reliabilitás
R	= többszörös korrelációs együttható
R^2	= teljes megmagyarázott variancia
β	= standardizált regressziós együttható (path koefficiens)
t	= a Student-eloszlás t-értéke
p	= valószínűségi szint
p_i	= az i-edik feladat nehézségi indexe
q_i	= $1 - p_i$
a, b, \dots, f	= a szubtesztek feladatainak azonosító jelei

Rövidítések

Szubtesztek (műveletek)

DSZ	= Descartes-féle szorzatok képzése
ISV	= Ismétléses variációk képzése
INV	= Ismétlés nélküli variációk képzése
ÖIV	= Az összes ismétléses variáció képzése
ISK	= Ismétléses kombinációk képzése
INK	= Ismétlés nélküli kombinációk képzése
ISP	= Ismétléses permutációk képzése
ÖRH	= Az összes részhalmaz képzése

A feladatok tartalma

M	= Manipulatív tartalom
K	= Képi tartalom
F	= Formális tartalom

Tesztek

V	= "VARIÁLÁS" teszt
K	= "KOMBINÁLÁS" teszt

FÜGGELÉK

A kombinatív képesség vizsgálatához használt mérőeszközök

Manipulatív tartalom 174

Instrukciók a manipulatív feladatokhoz (174)

"VARIÁLÁS" teszt (175-177)

"KOMBINÁLÁS" teszt (178-180)

"VARIÁLÁS" értékelő lap (181)

"KOMBINÁLÁS" értékelő lap (182)

Képi tartalom 183

"VARIÁLÁS" teszt (183-190)

"KOMBINÁLÁS" teszt (191-195)

Formális tartalom 196

"VARIÁLÁS" teszt (196-200)

"KOMBINÁLÁS" teszt (201-205)

KOMBINATÍV KÉPESSÉG

Instrukciók a manipulatív feladatokhoz.

Módszer

Kiscsoportos vizsgálat egyszerre legfeljebb hat tanulóval.

A tanulókat egy vízszintes lapú asztalhoz (padhoz) ültetjük, mindegyiket külön asztalhoz, hogy ne zavarják egymást. Kiadjuk a feladatokat tartalmazó lapokat és az eszközöket.

Amikor egy tanuló egy feladattal elkészült, jelentkezik. Ekkor az általa elkészített összeállításokat feljegyezzük az ÉRTÉKELŐ LAP-ra. Az összeállításokat olyan sorrendben jegyezzük fel, ahogyan azt a tanuló maga elé rakta.

Az értékelő lapon az elemek (pálcikák, karton lapok, korongok) színének kezdőbetűjét használjuk, nyomtatott nagybetűket írunk. A fehér színt a feketétől való megkülönböztetés érdekében az utolsó, az R betűvel jelöljük. Tehát: Narancs, Barna, fehér, Piros, Kék, Zöld, Sárga, Fekete.

Ha egy tanuló több összeállítást csinált, mint ahány hely az értékelő lapon van, annak oka többnyire figyelmetlenség vagy a feladat félreértése, meg nem értése. Ilyen esetekben először nem jegyezzük fel a tanuló produkcióját, hanem felhívjuk a figyelmét arra, hogy valahol hibát követett el, és felolvassuk a megfelelő feladat szövegét valamint a feladatokat megelőző általános instrukciókat, hangsúlyozva az aláhúzott részeket. Ha a tanuló másodszor is több összeállítást csinál, mint amennyi hely az értékelő lapon van, sorrendben elől kezdve annyi összeállítást jegyezzük fel, amennyi hely az értékelő lapon van, a többit figyelmen kívül hagyjuk.

A szövegrészek felolvasásán túl több segítséget nem adunk.

Eszközök

Variálás: Készletenként 10 db narancs színű, 10 db barna, 10 db fehér háromszög, 10 db piros, 10 db kék, 10 db zöld, 10 db sárga négyzet, 40 db piros, 40 db kék, 10 db sárga, 10 db zöld, 10 db fekete és 5 db fehér pálcika, 20 db piros-kék számolókorong.

Kombinálás: 30 db piros, 20 db kék, 15 db sárga, 12 db fekete, 12 db fehér pálcika.

A kiküldött készletek csak a színes lapokat, valamint a fekete és fehér pálcikákat tartalmazzák. A készleteket pálcikákkal és számolókorongokkal az iskolában egészítjük ki.

VARIÁLÁS

(Manipulatív feladatok)

A következő feladatokban pálcikákból és kartonlapokból kell bizonyos összeállításokat kirakni, és meg kell találni a feltételeknek megfelelő összes különböző összeállítást. Mindegyik feladatban meg van határozva, hogy milyen összeállításokat kell elkészíteni, hogy milyen eszközöket használhatsz fel, és az is, hogy egy összeállításban szerepelhetnek-e azonos színű pálcikák, vagy az összeállításnak csupa különböző színű pálcikából kell állnia. Figyelmesen olvasd el a feladatok szövegét, és rakd ki az összes különböző, a feladatokban megadott feltételeknek megfelelő összeállítást! Ha egy feladattal elkészültél, hagyd magad előtt amit kiraktál, és jelentkezz!

A következő feladatokban megadott ábra szerint kell összeállításokat készíteni. Mindegyik feladatban meg van határozva, hogy melyik elemből milyen színeket használhatsz fel.

- a) Rakd ki az ábrán látható összeállítást az összes különböző módon, ha a NARANCS és a BARNA színű háromszögeket és a KÉK és a PIROS négyzeteket használhatod fel!



- b) Rakd ki az ábrán látható összeállítást az összes különböző módon, ha a NARANCS, a BARNA és a FEHÉR színű háromszögeket és a SÁRGA és a ZÖLD négyzeteket használhatod fel!



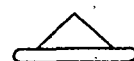
- c) Rakd ki az ábrán látható összeállítást az összes különböző módon, ha a NARANCS, a BARNA és a FEHÉR színű háromszögeket és a SÁRGA, a ZÖLD, a KÉK és a PIROS négyzetet használhatod fel!



- d) Rakd ki az ábrán látható összeállítást az összes különböző módon, ha a NARANCS és a BARNA színű háromszögeket, a KÉK és a PIROS négyzeteket és a SÁRGA és a ZÖLD pálcikákat használhatod fel!



- e) Rakd ki az ábrán látható összeállítást az összes különböző módon, ha a NARANCS és a BARNA színű háromszögeket és a KÉK, a PIROS, a SÁRGA, a ZÖLD, a FEKETE és a FEHÉR színű pálcikákat használhatod fel!



- f) Rakd ki az ábrán látható összeállítást az összes különböző módon, ha NARANCS és a BARNA színű háromszögeket, a PIROS és a KÉK korongokat, a SÁRGA és a ZÖLD négyzeteket és a FEKETE és a PIROS pálcikákat használhatod fel!



A következő feladatoknál egy-egy pálcikasorban több azonos színű pálcika is előfordulhat, vagyis egy-egy összeállításban bármennyi egyforma pálcikát felhasználhatsz.

- a) Rakd ki az összes különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasorban azonos színű pálcikák is szerepelhetnek!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



- b) Rakd ki az összes különböző, HÁROM PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasorban azonos színű pálcikák is szerepelhetnek!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



- c) Rakd ki az összes különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasorban azonos színű pálcikák is szerepelhetnek!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.



- d) Rakd ki az összes különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasorban azonos színű pálcikák is szerepelhetnek!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD.



- e) Rakd ki az összes különböző, NÉGY PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasorban azonos színű pálcikák is szerepelhetnek!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



Most olyan feladatokkal találkozol, amelyekben csak pálcikákat kell felhasználni, és egy-egy összeállításban nem szerepelhetnek azonos színű pálcikák. Vagyis mindegyik pálcikasornak csupa különböző pálcikából kell állnia!

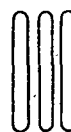
- a) Rakd ki az összes különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasornak csupa különböző pálcikából kell állnia!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.



- b) Rakd ki az összes különböző, HÁROM PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasornak csupa különböző pálcikából kell állnia!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.



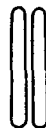
- c) Rakd ki az összes különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasornak csupa különböző pálcikából kell állnia!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD.



- d) Rakd ki az összes különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ pálcikasort az ábrán látható módon, ha egy-egy pálcikasornak csupa különböző pálcikából kell állnia!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD, FEKETE.



A következő feladatokban pálcikákból kell pálcikasorozatokot összeállítani, és itt számít a pálcikák sorrendje is. Egy pálcikasorozat állhat egy vagy két vagy több pálcikából, de mindig legfeljebb annyiból, amennyit a feladat előír. Az összeállításokban lehetnek azonos színű pálcikák is.

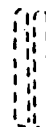
- a) Rakd ki az összes lehetséges különböző pálcikasorozatot, ha egy pálcikasorozat LEGFELJEBB KÉT PÁLCIKÁBÓL állhat!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



- b) Rakd ki az összes lehetséges különböző pálcikasorozatot, ha egy pálcikasorozat LEGFELJEBB KÉT PÁLCIKÁBÓL állhat!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.



- c) Rakd ki az összes lehetséges különböző pálcikasorozatot, ha egy pálcikasorozat LEGFELJEBB HÁROM PÁLCIKÁBÓL állhat!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



- d) Rakd ki az összes lehetséges különböző pálcikasorozatot, ha egy pálcikasorozat LEGFELJEBB KÉT PÁLCIKÁBÓL állhat!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD.



KOMBINÁLÁS

(Manipulatív feladatok)

A következő feladatokban pálcikákból kell összeállításokat kirakni, és meg kell találni a feltételeknek megfelelő összes különböző összeállítást. Mindegyik feladatban meg van határozva, hogy milyen összeállításokat kell elkészíteni, hogy milyen pálcikákat használhatsz fel, hogy egy összeállításban szerepelhetnek-e azonos színű pálcikák, és az is, hogy milyen szempontok alapján tekintjük az összeállításokat különbözőeknek, vagy egyformáknak.

Figyelmesen olvasd el a feladatok szövegét, és rakd ki az összes különböző, a feladatokban megadott feltételeknek megfelelő összeállítást! Ha egy feladattal elkészültél, hagyd magad előtt amit kiraktál, és jelentkezz!

Először olyan feladatokkal találkozol, amelyekben megadott pálcikákból kell bizonyos számút kiválasztani, és belőlük csoportokat összeállítani. Egy összeállításban azonos színű pálcikák is szerepelhetnek. Az összeállításokban nem számít a pálcikák sorrendje, mindegy, hogy azokat milyen sorrendben rakod ki. Ha tehát két összeállításban pontosan ugyanolyan pálcikák szerepelnek, a két összeállítást egyformának tekintjük. Vigyázz, hogy csak különböző összeállítást csinálj, ne állíts elő több olyat is, amelyik egyformának számít!

- a) Rakd ki az összes lehetséges különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításban azonos színű pálcikák is lehetnek, és a pálcikák sorrendje nem számít!
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



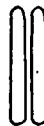
- b) Rakd ki az összes lehetséges különböző, HÁROM PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításban azonos színű pálcikák is lehetnek, és a pálcikák sorrendje nem számít!
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



- c) Rakd ki az összes lehetséges különböző, NÉGY PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításban azonos színű pálcikák is lehetnek, és a pálcikák sorrendje nem számít!
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



- d) Rakd ki az összes lehetséges különböző, KÉT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításban azonos színű pálcikák is lehetnek, és a pálcikák sorrendje nem számít!
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.

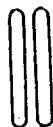


- e) Rakd ki az összes lehetséges különböző, HÁROM PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításban azonos színű pálcikák is lehetnek, és a pálcikák sorrendje nem számít!
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.



- f) Rakd ki az összes lehetséges különböző KÉT PÁLCI-
KÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításban
azonos színű pálcikák is lehetnek, és a pálcikák
sorrendje nem számít!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD.



A következő feladatokban megadott pálcikákból kell meg-
határozottakat kiválasztani és belőlük csoportokat összeállí-
tani.

Ezekben a feladatokban nem számít a pálcikák sorrendje, mind-
egy, hogy azokat milyen sorrendben rakod ki. Ha tehát két
összeállításban pontosan ugyanolyan pálcikák szerepelnek, akkor
a két összeállítást egyformának tekintjük. Vigyázz, hogy csak
különböző összeállítást csinálj, ne állíts elő több olyat is,
amelyik egyformának számít! Egy színt egy összeállításban csak
egyszer használhatsz fel, vagyis egy-egy összeállításnak csupa
különböző színű pálcikából kell állnia.

- a) Rakd ki az összes lehetséges különböző, KÉT PÁLCI-
KÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításnak
csupa különböző színű pálcikából kell állnia, és a
pálcikák sorrendje nem számít!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.



- b) Rakd ki az összes lehetséges különböző, KÉT PÁLCI-
KÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításnak
csupa különböző színű pálcikából kell állnia, és a
pálcikák sorrendje nem számít!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD.



- c) Rakd ki az összes lehetséges különböző, KÉT PÁLCI-
KÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításnak
csupa különböző színű pálcikából kell állnia, és a
pálcikák sorrendje nem számít!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD,
FEKETE.



- d) Rakd ki az összes lehetséges különböző, HÁROM PÁLCI-
KÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításnak
csupa különböző színű pálcikából kell állnia, és a
pálcikák sorrendje nem számít!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD,
FEKETE.



- e) Rakd ki az összes lehetséges különböző, NÉGY PÁLCI-
KÁBÓL ÁLLÓ összeállítást, ha egy összeállításnak
csupa különböző színű pálcikából kell állnia, és a
pálcikák sorrendje nem számít!

Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD,
FEKETE, FEHÉR.



A következő feladatokban pálcikákból kell sorozatokat kirakni. Itt természetesen számít a pálcikák sorrendje is. A sorozatokban bizonyos színű pálcikák meghatározott számban többször is előfordulhatnak.

a) Rakd ki az összes olyan különböző, HÁROM PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ sorozatot, amelyben egy PIROS és két KÉK pálcika van!



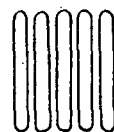
b) Rakd ki az összes olyan különböző, NÉGY PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ sorozatot, amelyben két PIROS és két KÉK pálcika van!



c) Rakd ki az összes olyan különböző, NÉGY PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ sorozatot, amelyben két PIROS, egy KÉK és egy ZÖLD pálcika van!



d) Rakd ki az összes olyan különböző, ÖT PÁLCIKÁBÓL ÁLLÓ sorozatot, amelyben két PIROS és három KÉK pálcika van!



A következő feladatokban az összes lehetséges számú pálcikából álló összeállítást el kell készíteni, vagyis mindegyik feladatban lesznek olyan összeállítások, amelyek egy pálcikából állnak, amelyek két pálcikából állnak, és így tovább, vagyis mindenféle számú pálcikából álló összeállítások, amilyeneket csak a feladatban megadott pálcikákkal meg lehet csinálni.

Az összeállításoknak csupa különböző színű pálcikából kell állniuk, és a pálcikák sorrendje nem számít.

a) Rakd ki az összes lehetséges számú pálcikából álló összes különböző összeállítást, ha egy összeállításban nem lehetnek azonos színű pálcikák, és a pálcikák sorrendje nem számít!
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK.



b) Rakd ki az összes lehetséges számú pálcikából álló különböző összeállítást, ha egy összeállításban nem lehetnek azonos színű pálcikák, és a pálcikák sorrendje nem számít!
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA.



c) Rakd ki az összes lehetséges számú pálcikából álló összes különböző összeállítást, ha egy összeállításban nem lehetnek azonos színű pálcikák, és a pálcikák sorrendje nem számít!
Felhasználható pálcikák: PIROS, KÉK, SÁRGA, ZÖLD.



VARIÁLÁS
(Manipulatív feladatok)

Értékelő lap

a/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

b/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

c/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

d/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

e/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

f/ ☐

a/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

b/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

c/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

d/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

e/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

a/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

b/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

c/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

d/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

a/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

b/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

c/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

d/ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

KOMBINÁLÁS
(Manipulatív feladatok)

Értékelő lap

a/ b/

c/

d/

e/

f/

a/ b/

c/

d/

e/

a/

b/

c/

d/

a/

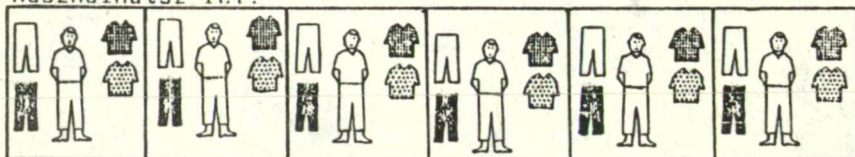
b/

c/

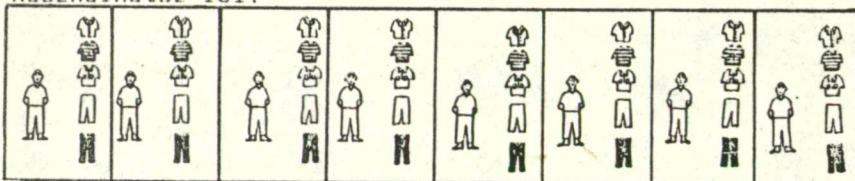
VARIÁLÁS
(Képi feladatok)

A következő feladatokban egy fiút kell felöltöztetni különböző ruhákba. Minden feladatnál meg van adva, hogy milyen ruhadarabokat használhatsz fel. Kis vonalkával összekötve a fiút és a ruhadarabokat, jelöld, melyik ruhadarabot hova tennéd! A feladatokban az összes különböző öltöztetési lehetőséget meg kell csinálnod. Vigyázz, mindegyik feladatnál több ábra van, mint ahány különböző lehetőséget találni fogsz!

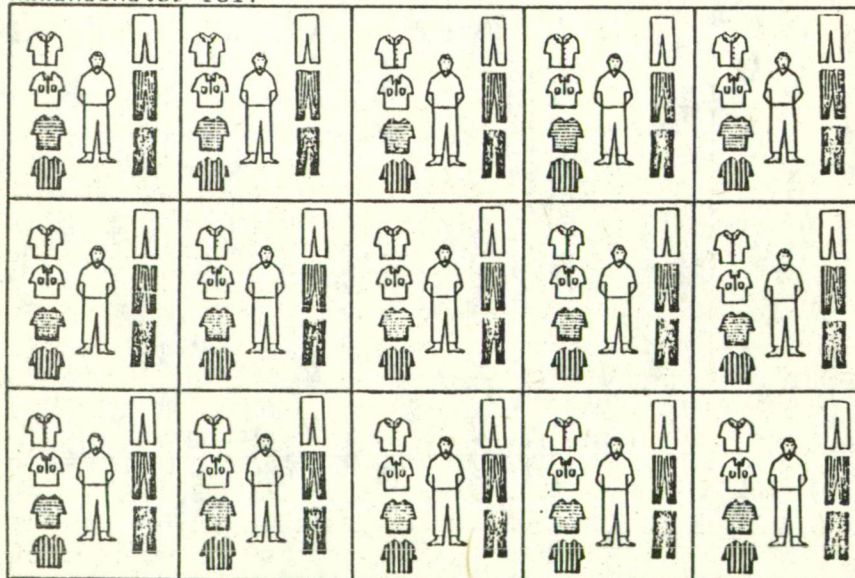
- a) Öltöztess fel az ábrán látható fiút a lehetséges összes különböző módon, ha kétféle inget és kétféle nadrágot használhatsz fel!



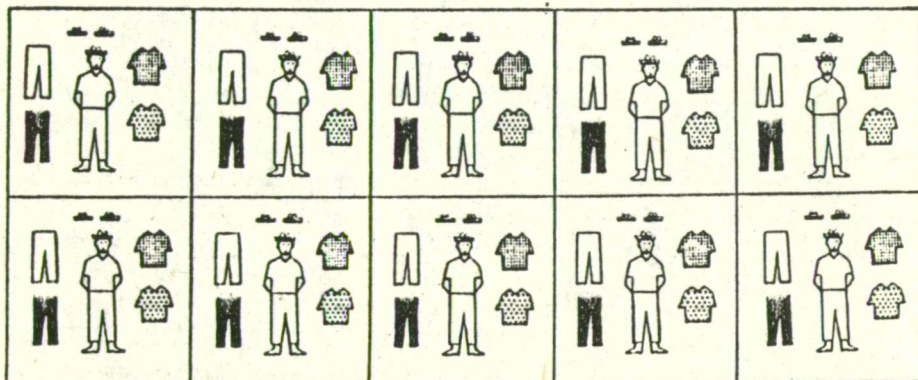
- b) Öltöztess fel az ábrán látható fiút a lehetséges összes különböző módon, ha háromféle inget és kétféle nadrágot használhatsz fel!



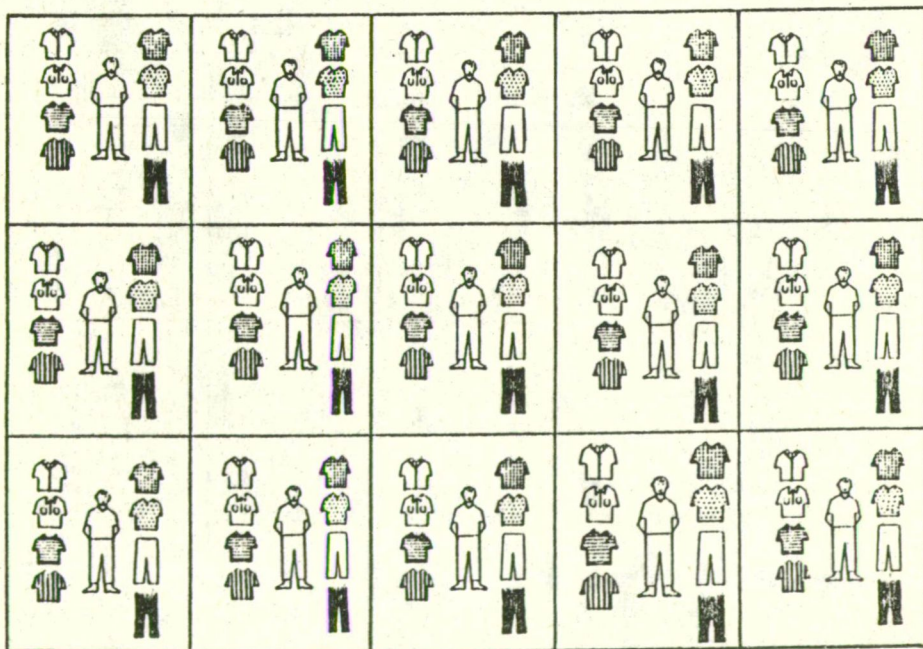
- c) Öltöztess fel az ábrán látható fiút a lehetséges összes különböző módon, ha négyféle inget és háromféle nadrágot használhatsz fel!



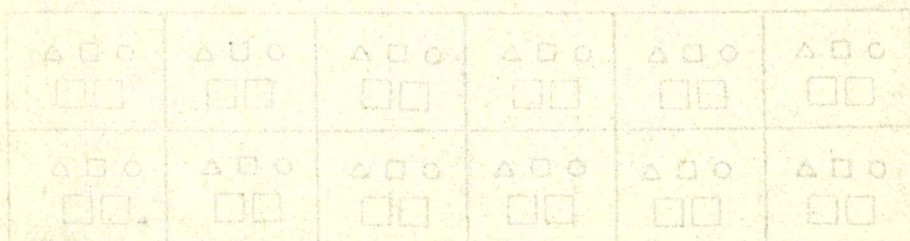
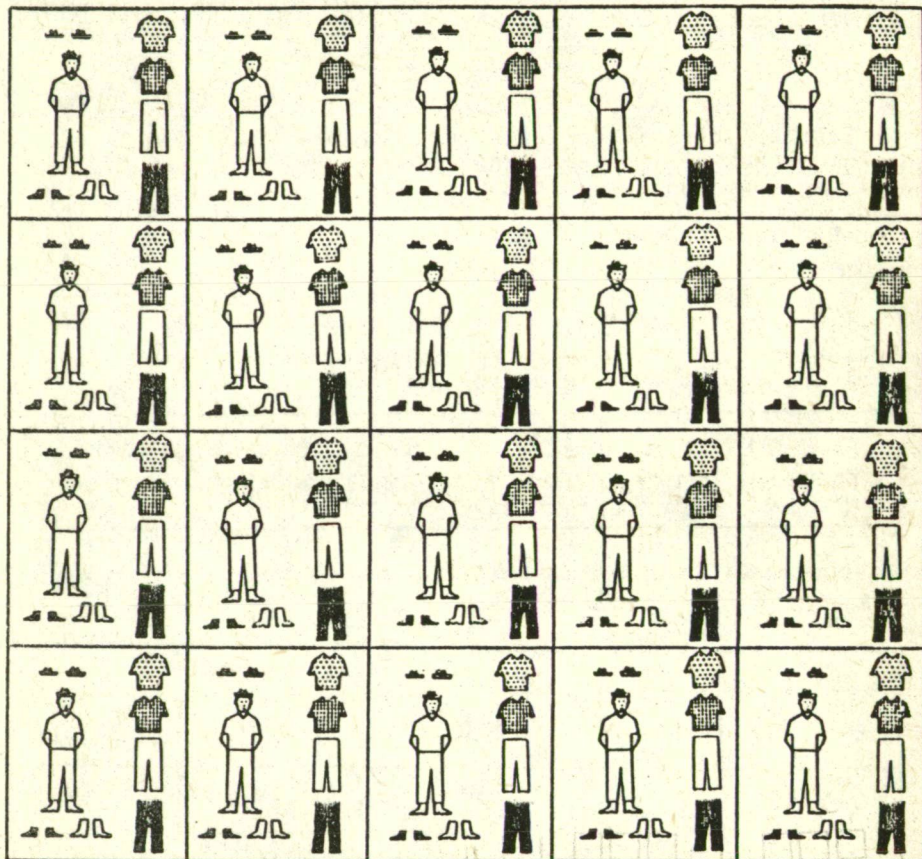
- d) Öltöztess fel az ábrán látható fiút a lehetséges összes különböző módon, ha kétféle sapkát, kétféle inget és kétféle nadrágot használhatsz fel!



- e) Öltöztess fel az ábrán látható fiút a lehetséges összes különböző módon, ha hatféle inget és kétféle nadrágot használhatsz fel!



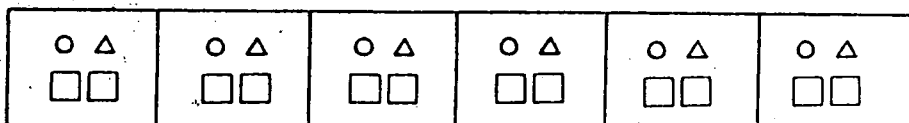
f) Öltöztessd fel az ábrán látható fiút a lehetséges összes különböző módon, ha kétféle sapkát, kétféle inget, kétféle nadrágot és kétféle cipőt használhatsz fel!



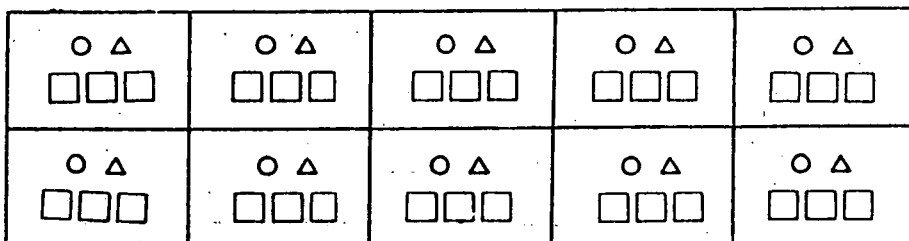
A következő feladatokban jelekből (pl.: kör, háromszög, négyzet stb.) jelsorozatokot kell készíteni úgy, hogy a jeleket a kis négyzetekbe rajzolod. Mindegyik feladatban számít a jelek sorrendje, és mindenütt meg van határozva, hogy milyen módon használhatod fel a jeleket a jelsorozatokhoz. A feladatokban az összes lehetséges megoldást meg kell keresni.

Először olyan feladatokkal találkozol, amelyeknél a jeleket többször is felhasználhatod egy jelsorozatban, tehát egy-egy jelsorozatban bármennyi azonos jel is lehet. Vigyázz, mindegyik feladatban több kis ábra van, mint ahány különböző lehetőséget találni fogsz!

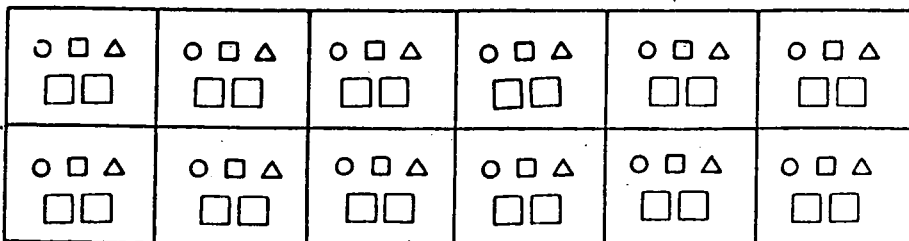
- a) Állítsd elő az ábrán látható két jelből az összes lehetséges különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, ha egy jelsorozatban azonos jelek is szerepelhetnek!



- b) Állítsd elő az ábrán látható két jelből az összes lehetséges különböző, HÁROM JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, ha egy jelsorozatban azonos jelek is szerepelhetnek!



- c) Állítsd elő az ábrán látható három jelből az összes lehetséges különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, ha egy jelsorozatban azonos jelek is szerepelhetnek!



- d) Állítsd elő az ábrán látható négy jelből az összes lehetséges különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, ha egy jelsorozatban azonos jelek is szerepelhetnek!

○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □
○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □
○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □

- e) Állítsd elő az ábrán látható két jelből az összes lehetséges különböző, NÉGY JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, ha egy jelsorozatban azonos jelek is szerepelhetnek!

○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □
○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □
○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □
○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □	○ △ □ □ □ □

Most olyan feladatok következnek, amelyeknél minden jelet csak egyszer használhatsz fel egy-egy jelsorozatban, vagyis a jelsorozatoknak csupa különböző jelből kell állni. Vigyázz, mindegyik feladatban több kis ábra van, mint ahány különböző lehetőséget találni fogsz!

- a) Állítsd elő az ábrán látható három jelből az összes lehetséges különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot!

○ □ △	○ □ △	○ □ △	○ □ △	○ □ △	○ □ △	○ □ △	○ □ △
□ □	□ □	□ □	□ □	□ □	□ □	□ □	□ □

- b) Állítsd elő az ábrán látható három jelből az összes lehetséges különböző, HÁROM JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot!

○ □ △ □ □ □	○ □ △ □ □ □	○ □ △ □ □ □	○ □ △ □ □ □
○ □ △ □ □ □	○ □ △ □ □ □	○ □ △ □ □ □	○ □ △ □ □ □

- c) Állítsd elő az ábrán látható négy jelből az összes lehetséges különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot!

○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □
○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □	○ □ △ + □ □

- d) Állítsd elő az ábrán látható öt jelből az összes lehetséges különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot!

○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □
○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □
○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □	○ □ △ + - □ □

A következő feladatokban jelekből (kör, háromszög, négyzet, kereszt) jelsorozatokot kell készíteni. SZÁMÍT A JELEK SORRENDJE, ÉS EGY JEL TÖBBSZÖR IS ELŐFORDULHAT EGY JELSOROZATBAN. EGY JELSOROZAT ÁLLHAT EGY VAGY TÖBB JELBŐL, DE LEGFELJEBB ANNYIBÓL, AHÁNY SZAGGATOTT VONALÚ NÉGYZETTEL JELÖLT HELY AZ ÁBRÁKON VAN. A kis ábrákon állítsd elő jelsorozatokot úgy, hogy a jeleket a megfelelő kis négyzetekbe rajzolod! Ha nem használod fel az összes helyet, mindig az első helyen kezd a bejelölést és a jeleket tedd egymás melletti helyekre! A feladatokban mindig az összes különböző jelsorozatot kell megkeresni. Vigyázz, mindegyik feladatban több ábra van, mint ahány különböző jelsorozatot találni fogsz!

- a) Állítsd elő az ábrán látható két jellel az összes, különböző jelsorozatot, ha egy jelsorozat legfeljebb két jelből állhat! A jeleket rajzold a megfelelő szaggatott vonalú kis négyzetbe!

○△	○△	○△	○△	○△	○△	○△	○△
□□□	□□□	□□□	□□□	□□□	□□□	□□□	□□□

- b) Állítsd elő az ábrán látható három jellel az összes, különböző jelsorozatot, ha egy jelsorozat legfeljebb két jelből állhat! A jeleket rajzold a megfelelő szaggatott vonalú kis négyzetbe!

○□△	○□△	○□△	○□△	○□△	○□△	○□△
□□□	□□□	□□□	□□□	□□□	□□□	□□□
○□△	○□△	○□△	○□△	○□△	○□△	○□△
□□□	□□□	□□□	□□□	□□□	□□□	□□□

- c) Állítsd elő az ábrán látható két jellel az összes különböző jelsorozatot, ha egy jelsorozat legfeljebb három jeltől állhat! A jeleket rajzold a megfelelő szaggatott vonalú kis négyzetbe!

○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□
○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□
○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□	○ △ □□□□

- d) Állítsd elő az ábrán látható négy jellel az összes különböző jelsorozatot, ha egy jelsorozat legfeljebb két jeltől állhat! A jeleket rajzold a megfelelő szaggatott vonalú kis négyzetbe!

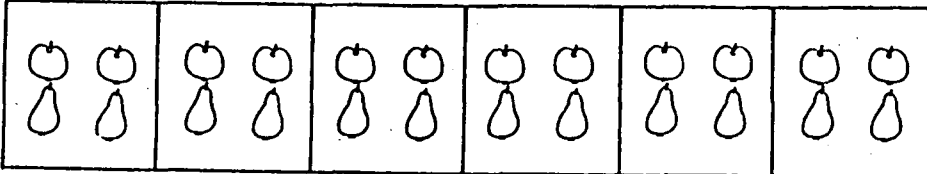
○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□
○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□
○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□
○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□	○ □ + △ □□

KOMBINÁLÁS
(Képi feladatok)

A következő feladatokban mindig megadott számú gyümölcsöt kell egy zárt vonallal bekarikázni. A KERETEN BELÜL LEHETNEK AZONOS ÉS KÜLÖNBŐZŐ GYÜMÖLCSÖK IS, A LÉNYEG AZ, HOGY A SZÁMUK ANNYI LEGYEN, AMENNYIT A FELADAT ELŐÍR. Két keretezés akkor számít különbözőnek, ha a két kereten belül nem pontosan ugyanolyan gyümölcsök vannak. A feladatokban az összes különböző bekarikázási lehetőséget kell megkeresni. Egy-egy kis ábrán egy bekarikázási lehetőséget kell bejelölni. Vigyázz, mindegyik feladatban több az ábra, mint ahány különböző lehetőséget találni fogsz!

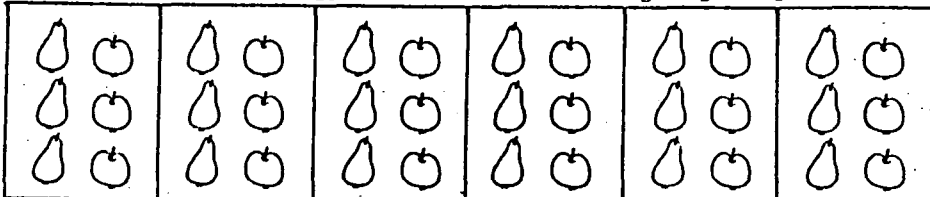
- a) Karikázz be két gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!

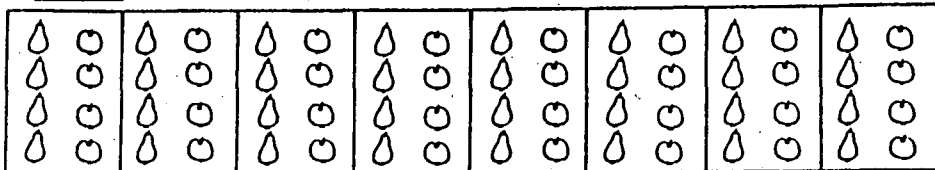


- b) Karikázz be három gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!

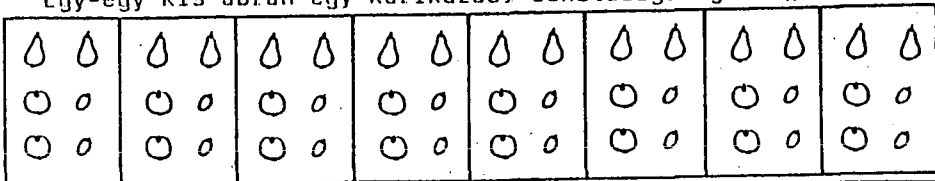


- c) Karikázz be négy gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon! Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



- d) Karikázz be két gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



A következő feladatokban olyan jelsorozatokot kell előállítani, amelyekben bizonyos jelek meghatározott számban többször is előfordulnak egy jelsorozatban. Vigyázz, mindegyik feladatban több ábra van, mint ahány különböző lehetőséget találni fogsz!

- a) Állítsd elő az összes különböző, HÁROM JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, amelyben két kör és egy háromszög van!

○○△ □□□	○○△ □□□	○○△ □□□	○○△ □□□	○○△ □□□
------------	------------	------------	------------	------------

- b) Állítsd elő az összes különböző, NÉGY JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, amelyben két kör és két háromszög van!

○○△△ □□□□	○○△△ □□□□	○○△△ □□□□	○○△△ □□□□
○○△△ □□□□	○○△△ □□□□	○○△△ □□□□	○○△△ □□□□

- c) Állítsd elő az összes különböző, NÉGY JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, amelyben két kör, egy négyzet és egy háromszög van!

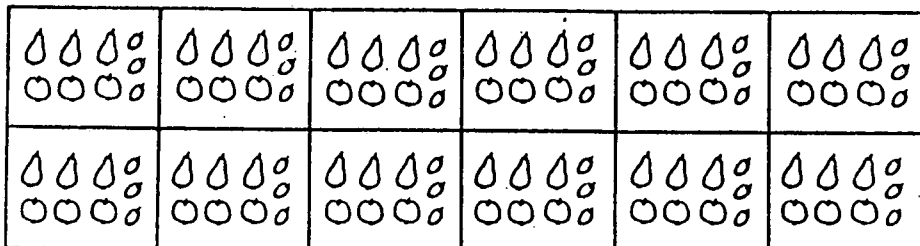
○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□
○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□
○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□	○○□△ □□□□

- d) Állítsd elő az összes különböző, ÖT JELBŐL ÁLLÓ jelsorozatot, amelyben három kör és két háromszög van!

○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□
○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□
○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□	○○○△△ □□□□□

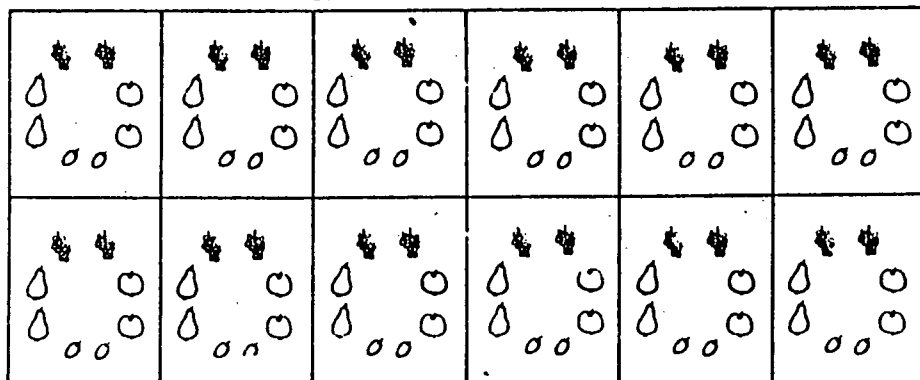
e) Karikázz be három gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



f) Karikázz be két gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

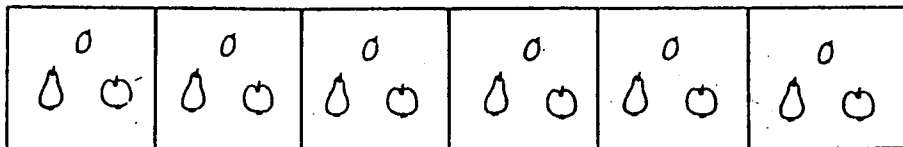
Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



A következő feladatokban mindig megadott számú gyümölcsöt kell egy zárt vonallal bekarikázni. A feladatokban az összes különböző bekarikázási lehetőséget meg kell találni. Egy-egy kis ábrán egy bekarikázási lehetőséget kell bejelölni. Vigyázz, mindegyik feladatban több ábra van, mint ahány különböző lehetőséget találni fogsz!

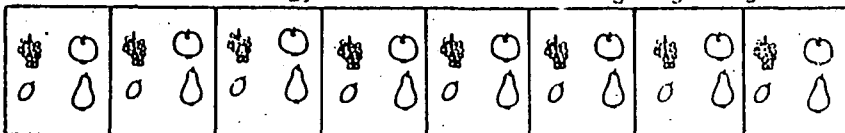
a) Karikázz be KÉT gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



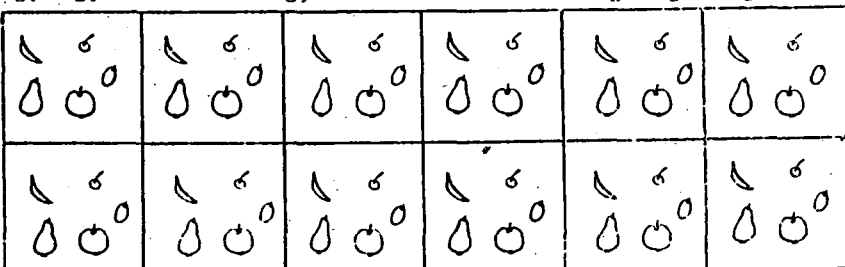
b) Karikázz be KÉT gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



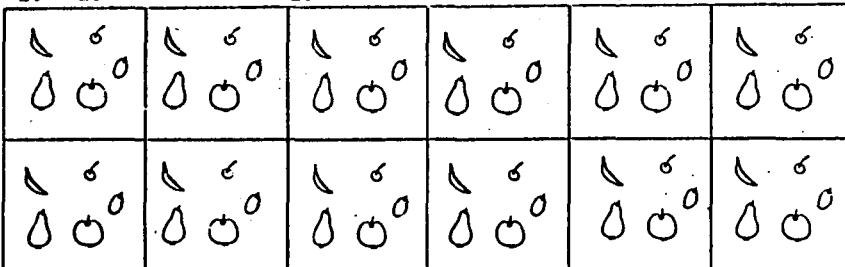
c) Karikázz be KÉT gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



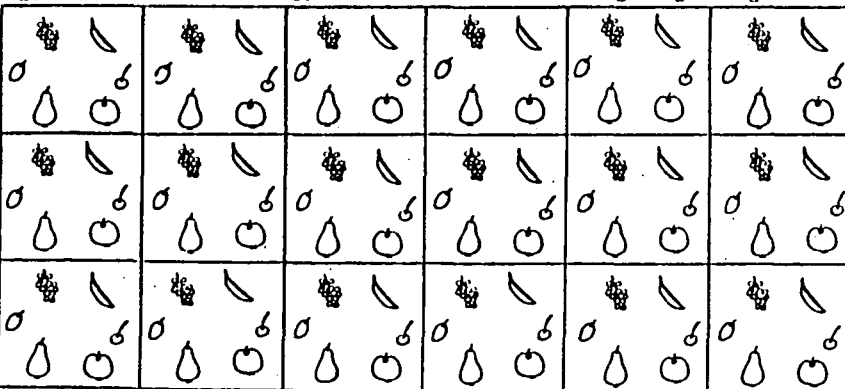
d) Karikázz be HÁROM gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!



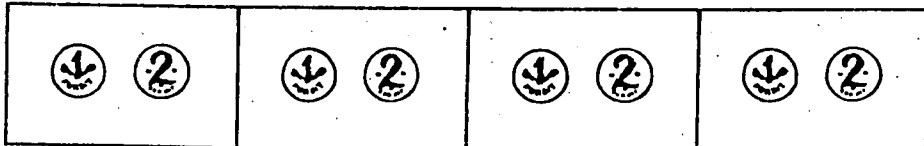
e) Karikázz be NEGY gyümölcsöt a lehetséges összes különböző módon!

Egy-egy kis ábrán egy karikázási lehetőséget jelölj!

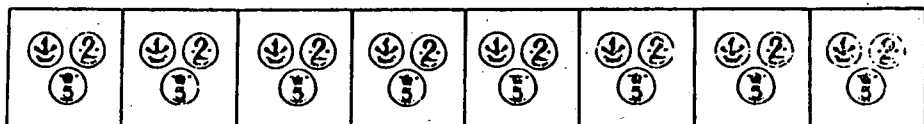


A következő feladatokban azt kell megkeresni, hogy megadott pénzürmék felhasználásával milyen pénzüsszegeket lehet kifizetni. Mindegyik kis ábrán egy pénzmennyiséget kell megjelölnöd úgy, hogy egy zárt vonallal bekeretezed azt vagy azokat az érméket, amelyekkel ezt a pénzmennyiséget ki lehet fizetni. Mindegyik feladatban az összes különböző lehetőséget meg kell keresni. Vigyázz, mindegyik feladatban több az ábra, mint ahány különböző lehetőséget találni fogsz!

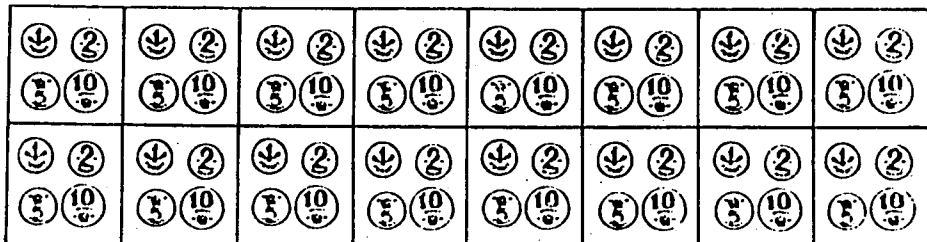
- a) Állítsd elő az ábrán látható érmékből az összes lehetséges pénzmennyiséget! A felhasznált érmék bekeretezésével jelöld be, hogy egy-egy összegbe milyen érmék tartoznak!



- b) Állítsd elő az ábrán látható érmékből az összes lehetséges pénzmennyiséget! A felhasznált érmék bekeretezésével jelöld be, hogy egy-egy összegbe milyen érmék tartoznak!



- c) Állítsd elő az ábrán látható érmékből az összes lehetséges pénzmennyiséget! A felhasznált érmék bekeretezésével jelöld be, hogy egy-egy összegbe milyen érmék tartoznak!



V A R I Á L Á S

(Formális feladatok)

A következő feladatokban mindig betűkből vagy más jelekből kell sorokat összeállítani és az összes különböző összeállítási lehetőséget meg kell keresni.
Figyelmesen olvasd el a feladatok szövegét, és sorold fel az összes különböző, a feladatban megadott feltételeknek megfelelő összeállítást!

Először olyan feladatokkal találkozol, amelyekben betűkből, számokból és más jelekből kell az autók rendszámtábláihoz hasonló sorozatokat összeállítani. Mindegyik feladatban meg van határozva, hogy a sorozat melyik helyére mit lehet felhasználni. Mindig az összes lehetséges sorozatot kell összeállítani.

- a) Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!

- b) Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B vagy a C betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!

- c) Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B vagy a C vagy a D betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 vagy a 3 számjegyet teheted!

d) Sorold fel az összes különböző, HÁROM JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B betűt, a második helyre a + vagy a - jelet, a harmadik helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!

e) Sorold fel az összes különböző, KÉT JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B vagy a C vagy a D vagy az E vagy az F betűt, a második helyre pedig az 1 vagy a 2 számjegyet teheted!

f) Sorold fel az összes különböző, NÉGY JELBŐL ÁLLÓ sorozatot, ha az első helyre az A vagy a B betűt, a második helyre a + vagy a - jelet, a harmadik helyre az 1 vagy a 2 számjegyet, a negyedik helyre pedig az X vagy az Y betűt teheted.

Ézután a feladatok megoldásában csak betűket kell használni. Mindegyik feladatban meg van határozva, hogy milyen betűket használhatsz fel, hogy hány betűből álló betűsort kell létrehozni és az is, hogy egy betűsorban ugyanaz a betű csak egyszer fordulhat elő, vagy többször is szerepelhet.

A következő feladatoknál egy-egy betűsorban ugyanaz a betű többször is előfordulhat, vagyis egy betűt egy betűsorban bármennyiszer felhasználhatsz.

a) Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsorban azonos betűk is szerepelhetnek!
Felhasználható betűk: A, B.

b) Sorold fel az összes különböző, HÁROM BETÜBŐL ÁLLÓ betűsort,
ha egy-egy betűsorban azonos betűk is szerepelhetnek!
Felhasználható betűk: A, B.

c) Sorold fel az összes különböző, KÉT BETÜBŐL ÁLLÓ betűsort,
ha egy-egy betűsorban azonos betűk is szerepelhetnek!
Felhasználható betűk: A, B, C.

d) Sorold fel az összes különböző, KÉT BETÜBŐL ÁLLÓ betűsort,
ha egy-egy betűsorban azonos betűk is szerepelhetnek!
Felhasználható betűk: A, B, C, D.

e) Sorold fel az összes különböző, NÉGY BETÜBŐL ÁLLÓ betűsort,
ha egy-egy betűsorban azonos betűk is szerepelhetnek!
Felhasználható betűk: A, B.

Ezután olyan feladatokkal találkozol, amelyeknél egy-egy betűsorban nem szerepelhetnek azonos betűk, vagyis egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia.

- a) Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia! Felhasználható betűk: A, B, C.
- b) Sorold fel az összes különböző, HÁROM BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia! Felhasználható betűk: A, B, C.
- c) Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia! Felhasználható betűk: A, B, C, D.
- d) Sorold fel az összes különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ betűsort, ha egy-egy betűsornak csupa különböző betűből kell állnia! Felhasználható betűk: A, B, C, D, E.

A következő feladatokban betűkből kell betűsorozatokat képezni, és itt SZÁMÍT A BETŰK SORRENDJE is. Egy betűsorozat állhat egy vagy két vagy több betűből, és mindig legfeljebb annyiból, amennyit a feladat előír.

a) Állítsd elő az A és B betűk felhasználásával az összes különböző betűsorozatot, ha egy betűsorozat LEGFELJEBB KÉT BETŰBŐL állhat!

b) Állítsd elő az A, B és C betűk felhasználásával az összes különböző betűsorozatot, ha egy betűsorozat LEGFELJEBB KÉT BETŰBŐL állhat!

c) Állítsd elő az A és B betűk felhasználásával az összes különböző betűsorozatot, ha egy betűsorozat LEGFELJEBB HÁROM BETŰBŐL állhat!

d) Állítsd elő az A, B, C és D betűk felhasználásával az összes különböző betűsorozatot, ha egy betűsorozat LEGFELJEBB KÉT BETŰBŐL állhat!

KOMBINÁLÁS

(Formális feladatok)

A következő feladatokban betűkből kell valamilyen összeállításokat csinálni. Mindig meg van határozva, hogy milyen módon kell az összeállításokat elkészíteni, és meg kell találni a feltételeknek megfelelő összes különböző megoldást! Vigyázz, hogy mindig azt csináld, amit a feladat előír! Különösen ügyelj arra, hogy melyik feladatban számít a betűk sorrendje és melyikben nem, valamint arra, hogy milyen számú betűből kell az összeállításoknak állni! Figyelmesen olvasd el a feladatok szövegét, és sorold fel a feltételeknek megfelelő, összes különböző megoldást!

Először olyan feladatokkal találkozol amelyekben megadott betűkből kell meghatározott számút kiválasztani, és belőlük csoportokat összeállítani. Ugyanazt a betűt egy-egy összeállításban többször is felhasználhatod, vagyis az összeállításokon belül azonos betűk is szerepelhetnek. Az összeállításokban nem számít a betűk sorrendje, mindegy, hogy azokat milyen sorrendben írod le. Ha tehát két összeállításban pontosan ugyanolyan betűk szerepelnek, és csak a betűk sorrendje különböző, akkor a két összeállítást egyformának tekintjük. Ha több egyformának számító összeállítást is felírsz, a feleslegeseket húzd át, vigyázz, hogy csak csupa különböző maradjon!

a) Készítsd el az összes lehetséges, különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A és a B betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

b) Készítsd el az összes lehetséges különböző, HÁROM BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A és a B betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

c) Készítsd el az összes lehetséges különböző, NÉGY BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A és a B betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

d) Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B és a C betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

e) Készítsd el az összes lehetséges különböző, HÁROM BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B és a C betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

f) Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B, a C és a D betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban többször is szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

A következő feladatokban megadott betűkből kell meghatározott számút kiválasztani és belőlük csoportokat összeállítani. Ezekben a feladatokban nem számít a betűk sorrendje, mindegy, hogy azokat milyen sorrendben írod le. Ha tehát két összeállításban pontosan ugyanolyan betűk szerepelnek és csak a betűk sorrendje különböző, akkor azokat egyformának tekintjük. Vigyázz, hogy csak csupa különböző összeállítást csinálj, ne állíts elő több olyat is, amelyik egyformának számít! Ugyanazt a betűt egy összeállításban belül csak egyszer használhatod fel, vagyis egy-egy összeállításnak csupa különböző betűkből kell állnia! Ha több egyformának számító összeállítást is felírsz, a feleslegeseket húzd át, vigyázz, hogy csupa különböző maradjon!

a) Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B és a C betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

b) Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B, a C és a D betűket használhatod fel és ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

c) Készítsd el az összes lehetséges különböző, KÉT BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B, a C, a D és az E betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

d) Készítsd el az összes lehetséges különböző, HÁROM BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B, a C, a D, és az E betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

e) Készítsd el az összes lehetséges különböző, HÁROM BETŰBŐL ÁLLÓ összeállítást, ha az A, a B, a C, a D és az E betűket használhatod fel, és ugyanaz a betű egy összeállításban csak egyszer szerepelhet! A betűk sorrendje nem számít!

A következő feladatokban betűkből kell sorozatokat előállítani. Itt természetesen számít a betűk sorrendje is. A sorozatokban bizonyos betűk meghatározott számban többször is előfordulnak.

- a) Állítsd elő az összes olyan különböző, HÁROM BETŰBŐL ÁLLÓ sorozatot, amelyben egy A és két B betű szerepel! A betűk sorrendje is számít!

- b) Állítsd elő az összes olyan különböző, NÉGY BETŰBŐL ÁLLÓ sorozatot, amelyben két A és két B betű szerepel! A betűk sorrendje is számít!

- c) Állítsd elő az összes olyan különböző, NÉGY BETŰBŐL ÁLLÓ sorozatot, amelyben két A, egy B és egy C betű szerepel! A betűk sorrendje is számít!

- d) Állítsd elő az összes olyan különböző, ÖT BETŰBŐL ÁLLÓ sorozatot, amelyben két A és három B betű szerepel! A betűk sorrendje is számít!

Most más típusú feladatok következnek. Ezekben is betűkből kell összeállításokat készíteni, és nem számít a betűk sorrendje. Viszont most egy-egy betűt csak egyszer használhatsz fel egy összeállításban, tehát az összeállításoknak csupa különböző betűkből kell állni.

A következő feladatokban az összes lehetséges számú betűből álló összeállítást el kell készíteni, vagyis mindegyik feladatban lesznek olyan összeállítások, amelyek egy betűből állnak, amelyek két betűből állnak, és így tovább, vagyis mindenféle számú betűből álló összeállítások, amilyeneket csak a feladatban megadott betűkkel meg lehet csinálni. Ha több egyformának számító összeállítást is felírsz, a feleslegeseket húzd át, vigyázz, hogy csak csupa különböző maradjon!

a) Készítsd el az összes lehetséges számú betűből álló összes különböző összeállítást, ha az A és a B betűket használhatod fel! Egy betű ugyanabban az összeállításban csak egyszer szerepelhet, és a betűk sorrendje nem számít.

b) Készítsd el az összes lehetséges számú betűből álló összes különböző összeállítást, ha az A, a B és a C betűket használhatod fel! Egy betű ugyanabban az összeállításban csak egyszer szerepelhet, és a betűk sorrendje nem számít.

c) Készítsd el az összes lehetséges számú betűből álló összes különböző összeállítást, ha az A, a B, a C és a D betűket használhatod fel! Egy betű ugyanabban az összeállításban csak egyszer szerepelhet, és a betűk sorrendje nem számít.

STRUCTURE AND DEVELOPMENT OF COMBINATIVE ABILITY

CONTENTS

Introduction	7
1. Preliminaries and problems	11
1.1 The concept of combinativity in psychology	7
1.2 The Piaget school	14
1.3 Examinations relating to combinative operations	20
1.4 Problems of combinative type in some Hungarian educational-psychological research	22
2. Theoretical background	25
2.1 General conception of combinative ability	25
2.2 Hypothetical system of combinative ability	29
3. Instruments of the examinations	35
3.1 Basic principles of test elaboration	35
3.2 Manipulative tasks	40
3.3 Figural tasks	41
3.4 Formal tasks	42
3.5 Reliability and validity of tests	43
4. Empirical research	49
4.1 Administration of tests and data sheets	49
4.2 Data processing	53
5. Manipulative content	59
5.1 Achievements in manipulative tasks	59
5.2 Developmental processes in manipulative tasks	63
5.3 Results in manipulative subtests	68
5.4 Examination of relationships of manipulative achievements	69
5.5 Summary of manipulative achievements	79

6. Figural content	83
6.1 Achievements in figural tasks	83
6.2 Developmental processes in figural tasks	87
6.3 Results in figural subtests	91
6.4 Examination of relationships of figural achievements	94
6.5 Summary of figural achievements	100
7. Formal content	103
7.1 Achievements in formal tasks	103
7.2 Developmental processes in formal tasks	107
7.3 Results in formal subtests	111
7.4 Examination of relationships of formal achievements	114
7.5 Summary of formal achievements	120
8. Combinative operational ability as a whole	123
8.1 Structure of operational ability	132
8.2 Development of combinative ability	132
8.3 Interaction between content and structure	126
9. Factors influencing the development of combinative ability	149
9.1 Possibilities of statistical analysis of factors influencing development	149
9.2 Systematizing and logical ability	149
9.3 School achievements and social background	150
9.4 Total impact of independent variables	154
References	161
List of figures	169
List of tables	170
List of abbreviations	171
Appendix	173
Manipulative tests	174
Figural tests	183
Formal tests	196

XB 105228

A kombinativitás az emberi gondolkodás egyik legjellemzőbb sajátossága: ez a képességünk teszi lehetővé, hogy bizonyos elemekből új konstrukciókat, változatos összeállításokat hozzunk létre. A kombinatív képesség középpontjában álló műveletrendszerrel több pszichológiai irányzat is foglalkozik, funkcióit legkidolgozottabban Piaget elmélete foglalja keretbe. Ez a könyv egy olyan vizsgálatot mutat be, amely a kombinatív műveletek rendszerének részletekbe menő elemzésére, belső struktúrájának és fejlődési folyamatának feltárására vállalkozik. A korábbi elméletek és kutatási eredmények összegzése után körvonalazza a tágabb értelemben vett kombinatív képesség fogalmát, majd ebben helyezi el a kombinatív műveletek rendszerét. Három életkorban több száz feladattal végzett vizsgálat adatai alapján elemzi a kombinatív műveletek különböző tartalmú megnyilvánulásait, a műveletrendszer belső szerkezetét, valamint a működést és a fejlődést meghatározó tényezőket. A kidolgozott eszközrendszer lehetővé teszi a kombinatív képesség fejlődésének pontosabb mérését. A vizsgálat eredményei a gondolkodás műveleti képességeinek hatékonyabb fejlesztését alapozzák meg.

Combinativity is one of the most characteristic features of human thinking: this ability enables us to create new constructions and various compositions from certain elements. A number of psychological trends deal with the focal system of operations of this ability, its functions have been best elaborated in the Piagetian theory. This book presents results of research with the aim of a detailed analysis of the system of combinative operations, describing its inner structure and its developmental process. After a summary of the results of former studies, the general conception of combinative ability is outlined and combinative operational ability as part of it is defined. The results of an assessment involving hundreds of test tasks (carried out in three age groups), are utilized to analyze the manifestations of combinative operations in different contents, the structure of system of operations, and the factors that determine the functioning and development of the operations. The measuring instruments allow a better assessment of the development of combinative operations, and the results of the study provide a foundation for the effective improvement of the operational abilities of thinking.